ایک متوالی سلسلہ بناتے ہیں جسکی ہر تین متصل رقمیں اس رشتہ

$$\text{ق}_{\text{ن}} - ۵\,\text{ق}_{\text{ن}-۱} + ۶\,\text{ق}_{\text{ن}-۲} = ۰$$

کے ذریعہ باہم مربوط ہیں۔

فرض کرو کہ $\text{ج} = \text{ق}_۱ + \text{ق}_۲\,\text{لا} + \text{ق}_۳\,\text{لا}^۲ + \dots \text{ق}_{\text{ن}}\,\text{لا}^{\text{ن}-۱} + \dots$

تب حسب دفعہ ۳۲۵ $\text{ج} = \dfrac{\text{ق}_۱ + (\text{ق}_۲ - ۵\,\text{ق}_۱)\,\text{لا}}{۱ - ۵\,\text{لا} + ۶\,\text{لا}^۲}$

لیکن پہلے دو مستدق $\frac{۶}{۵}$ اور $\frac{۳۰}{۱۹}$ ہیں۔

$$\therefore\ \text{ج} = \frac{۶}{۱ - ۵\,\text{لا} + ۶\,\text{لا}^۲} = \frac{۱۸}{۱ - ۳\,\text{لا}} - \frac{۱۲}{۱ - ۲\,\text{لا}}$$

جس سے $\text{ق}_{\text{ن}} = ۱۸ \times ۳^{\text{ن}-۱} - ۱۲ \times ۲^{\text{ن}-۱} = ۶(۳^{\text{ن}} - ۲^{\text{ن}})$

اسی طرح سے اگر $\text{ج}' = \text{ل}_۱ + \text{ل}_۲\,\text{لا} + \text{ل}_۳\,\text{لا}^۲ + \dots \text{ل}_{\text{ن}}\,\text{لا}^{\text{ن}-۱} + \dots$

تو ہم معلوم کر سکتے ہیں کہ $\text{ج}' = \dfrac{۵ - ۶\,\text{لا}}{۱ - ۵\,\text{لا} + ۶\,\text{لا}^۲} = \dfrac{۹}{۱ - ۳\,\text{لا}} - \dfrac{۴}{۱ - ۲\,\text{لا}}$

جس سے $\text{ل}_{\text{ن}} = ۹ \times ۳^{\text{ن}-۱} - ۴ \times ۲^{\text{ن}-۱} = ۳^{\text{ن}+۱} - ۲^{\text{ن}+۱}$

$$\therefore\ \frac{\text{ق}_{\text{ن}}}{\text{ل}_{\text{ن}}} = \frac{۶(۳^{\text{ن}} - ۲^{\text{ن}})}{۳^{\text{ن}+۱} - ۲^{\text{ن}+۱}}$$

یہ طریقہ صرف اسی صورت میں کار آمد ہو سکتا ہے جبکہ $\text{ا}_{\text{ن}}$ اور $\text{ب}_{\text{ن}}$، ن کی تمام قیمتوں کے لئے مستقل ہوں، مثلاً ہم دکھا سکتے ہیں کہ کسر مسلسل $\frac{\text{ب}}{\text{ا}+}\ \frac{\text{ب}}{\text{ا}+}\ \frac{\text{ب}}{\text{ا}+} \dots$ کی صورت میں متواتر مستدقوں کے شمار کنندے $\dfrac{\text{ب}}{۱ - \text{ا}\,\text{لا} - \text{ب}\,\text{لا}^۲}$

کی تفصیل میں لا کی قوتوں کے سروں کے مساوی ہیں اور نسب نما $\frac{ا + ب لا}{۱ - ا لا - ب لا^{۲}}$ کی تفصیل میں لا کی قوتوں کے سروں کے مساوی ہیں۔

۴۴۴۔ $ق_{ن}$ اور $ل_{ن}$ کی عام قیمتوں کی تحقیق کے متعلق طالب علم کو چاہیئے کہ محدود فرقوں (فائی نائٹ ڈفرنسز) پر کتب ریاضی کا مطالعہ کرے۔ الجبرا کے ذریعہ یہ قیمتیں صرف خاص خاص صورتوں میں معلوم ہو سکتی ہیں۔ ذیل کا طریقہ بعض اوقات مفید ثابت ہوگا۔

مثال۔ $\frac{۱}{۱+}\ \frac{۲}{۲+}\ \frac{۳}{۳+}$ ....

$ق_{ن}$ اور $ل_{ن}$ دونوں کے بنانے کا ایک ہی قاعدہ ہے۔ فرض کرو کہ اِن دونوں میں سے کسی کو $ع_{ن}$ سے تعبیر کیا جاتا ہے،

تب $ع_{ن} = ن ع_{ن-۱} + ن ع_{ن-۲}$

یا $ع_{ن} - (ن+۱) ع_{ن-۱} = -(ع_{ن-۱} - ن ع_{ن-۲})$

اسی طرح $ع_{ن-۱} - ن ع_{ن-۲} = -(ع_{ن-۲} - \overline{ن-۱}\, ع_{ن-۳})$

....

$ع_{۳} - ۴ ع_{۲} = -(ع_{۲} - ۳ ع_{۱})$

ضرب دینے سے حاصل ہوتا ہے۔

$ع_{ن} - (ن+۱) ع_{ن-۱} = (-۱)^{ن-۲} (ع_{۲} - ۳ ع_{۱})$

پہلے دو مستدق $\frac{۱}{۱}$ اور $\frac{۲}{۴}$ ہیں، اس لئے

$$\text{ق}_{\text{ن}} - (\text{ن}+۱)\,\text{ق}_{\text{ن}-۱} = (-۱)^{\text{ن}-۱} \text{ ، } \text{ل}_{\text{ن}} - (\text{ن}+۱)\,\text{ل}_{\text{ن}-۱} = (-۱)^{\text{ن}-۲}$$

پس

$$\frac{\text{ق}_{\text{ن}}}{\text{ن}+۱} - \frac{\text{ق}_{\text{ن}-۱}}{\text{ن}} = \frac{(-۱)^{\text{ن}-۱}}{\text{ن}+۱} \text{ ، } \frac{\text{ل}_{\text{ن}}}{\text{ن}+۱} - \frac{\text{ل}_{\text{ن}-۱}}{\text{ن}} = \frac{(-۱)^{\text{ن}-۲}}{\text{ن}+۱}$$

$$\frac{\text{ق}_{\text{ن}-۱}}{\text{ن}} - \frac{\text{ق}_{\text{ن}-۲}}{\text{ن}-۱} = \frac{(-۱)^{\text{ن}-۲}}{\text{ن}} \text{ ، } \frac{\text{ل}_{\text{ن}-۱}}{\text{ن}} - \frac{\text{ل}_{\text{ن}-۲}}{\text{ن}-۱} = \frac{(-۱)^{\text{ن}-۳}}{\text{ن}}$$

- -

$$\frac{\text{ق}_۲}{۳} - \frac{\text{ق}_۱}{۲} = -\frac{۱}{۳} \text{ ، } \frac{\text{ل}_۲}{۳} - \frac{\text{ل}_۱}{۲} = \frac{۱}{۳}$$

$$\frac{\text{ق}_۱}{۲} = \frac{۱}{۲} \text{ ، } \frac{\text{ل}_۱}{۲} = \frac{۱}{۲} = ۱ - \frac{۱}{۲}$$

جمع کرنے سے

$$\frac{\text{ق}_{\text{ن}}}{\text{ن}+۱} = \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} - \cdots\cdots + \frac{(-۱)^{\text{ن}-۱}}{\text{ن}+۱}$$

$$\frac{\text{ل}_{\text{ن}}}{\text{ن}+۱} = ۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴} + \cdots\cdots + \frac{(-۱)^{\text{ن}-۲}}{\text{ن}+۱}$$

ن کو لا انتہا بڑا بنانے سے

نہا $\dfrac{\text{ق}_{\text{ن}}}{\text{ل}_{\text{ن}}} = \dfrac{۱}{\text{ھو}} \div \left(۱ - \dfrac{۱}{\text{ھو}}\right) = \dfrac{۱}{\text{ھو}-۱}$ جو جملہ زیر بحث کی قیمت ہے۔

۴۴۵۔ اگر مسلسل کسر $\dfrac{\text{ب}_۱}{\text{ا}_۱+}\ \dfrac{\text{ب}_۲}{\text{ا}_۲+}\ \dfrac{\text{ب}_۳}{\text{ا}_۳+}$ ...... کا ہر ایک جزو ترکیبی ایک ایسی کسر واجب ہو جس کا شمار کنندہ اور نسب نما دونوں صحیح عدد ہوں تو یہ کسر مسلسل متباین ہوگی۔

اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ کسر مذکور متوافق ہے اور $\frac{ب}{ا}$ کے مساوی ہے جہاں ا اور ب مثبت صحیح اعداد ہیں۔ تب $\frac{ب}{ا} = \frac{ب_1}{ا_1 + ک_1}$ جہاں $ک_1$ سے لامتناہی کسر مسلسل $\frac{ب_2}{ا_2 +}\frac{ب_3}{ا_3 +}$ ...... مراد ہے، پس $ک_1 = \frac{ا ب_1 - ب ا_1}{ب}$

$= \frac{ج}{ب}$ (فرض کرو)

اب ا، ب، $ا_1$ $ب_1$ صحیح عدد ہیں اور ک مثبت ہے، اسلئے ج ایک مثبت صحیح عدد ہے، اسی طرح $\frac{ج}{ب} = \frac{ب_2}{ا_2 + ک_2}$ جہاں $ک_2$ سے لامتناہی کسر مسلسل $\frac{ب_3}{ا_3 +}\frac{ب_4}{ا_4 +}$ ...... مراد ہے،

لہذا $ک_2 = \frac{ب ب_2 - ج ا_2}{ج} = \frac{د}{ج}$ (فرض کرو) اور حسب سابق یہ نتیجہ نکل سکتا ہے کہ د مثبت صحیح عدد ہے اور علیٰ ہذا القیاس

نیز $\frac{ب}{ا}$، $\frac{ج}{ب}$، $\frac{د}{ج}$ ...... سب واجب کسریں ہیں۔

کیونکہ $\frac{ب}{ا}$ کم ہے $\frac{ب_1}{ا_1}$ سے جو کسر واجب ہے، $\frac{ج}{ب}$ کم ہے $\frac{ب_2}{ا_2}$ سے، $\frac{د}{ج}$ کم ہے $\frac{ب_3}{ا_3}$ سے، وغیرہ وغیرہ

پس ا، ب، ج، د ..... مثبت صحیح اعداد کا ایک لامتناہی سلسلہ بناتے ہیں اور بلحاظ مقدار نزولی ترتیب میں ہیں، اور

ایسا ہونا ناممکن ہے، پس مفروضہ کسر مسلسل متوافق نہیں ہو سکتی مندرجہ بالا نتیجہ اس صورت میں بھی برقرار رہتا ہے اگر بعض جزو ترکیبی واجب کسریں نہ ہوں بشرطیکہ ایک خاص جزو ترکیبی سے شروع ہو کر اس کے بعد کے سب اجزائے ترکیبی واجب کسریں ہوں۔ ایسے ہم اس طرح دیکھ سکتے ہیں۔

فرض کرو $\frac{ب_ن}{ا_ن}$ اور بعد کے سب اجزائے ترکیبی واجب کسریں ہیں، پس جیسا کہ ابھی ہم نے ثابت کیا ہے کہ وہ کسر مسلسل جو $\frac{ب_ن}{ا_ن}$ سے شروع ہوتی ہے متبائن ہے، اس کو ک سے تعبیر کرو، تب $\frac{ق_ن}{ل_ن}$ کے جواب میں جو مکمل خارج قسمت ہے وہ $\frac{ک}{۱}$ ہے اور اس لئے کسر مسلسل کی قیمت $\frac{ق_{ن-۱} + ک\, ق_{ن-۲}}{ل_{ن-۱} + ک\, ل_{ن-۲}}$ ہے۔

یہ متوافق نہیں ہو سکتی تاوقتیکہ $\frac{ق_{ن-۱}}{ل_{ن-۱}}$ برابر نہ ہو $\frac{ق_{ن-۲}}{ل_{ن-۲}}$ کے اور یہ ہو نہیں سکتا تاوقتیکہ $\frac{ق_{ن-۲}}{ل_{ن-۲}}$ برابر نہ ہو $\frac{ق_{ن-۳}}{ل_{ن-۳}}$ کے

$\frac{ق_{ن-۳}}{ل_{ن-۳}}$ برابر نہ ہو $\frac{ق_{ن-۴}}{ل_{ن-۴}}$ کے، ..... اور بالآخر $\frac{ق_۲}{ل_۲}$ برابر نہ ہو $\frac{ق_۱}{ل_۱}$ کے یعنی ب ب۲ برابر نہ ہو صفر کے جو ناممکن ہے لہذا مفروضہ کسر لازماً متبائن ہے۔

۴۴۶۔ اگر کسر مسلسل $\frac{ب_۱}{ا_۱}$ $\frac{ب_۲}{ا_۲}$ $\frac{ب_۳}{ا_۳}$ ...... کا ہر ایک جزو ترکیبی کسر واجب ہو جس کا شمار کنندہ اور نسب نما

صحیح عدد ہوں اور اگر کسی خاص جزو ترکیبی سے شروع ہو کر اس لامتناہی کسر کی قیمت ایک سے کم ہو تو کسر متبائن ہوگی۔ ثبوت کی سلکِ استدلال دفعۂ ماقبل کی مانند ہے۔

امثلہ نمبری ۳۱ (ا)

۱- ثابت کرو کہ کسر مسلسل

$$\frac{ب_۱}{ا_۱-}\;\frac{ب_۲}{ا_۲-}\;\frac{ب_۳}{ا_۳-}\cdots\cdots$$

میں $ق_ن = ا_ن ق_{ن-۱} - ب_ن ق_{ن-۲}$ اور $ل_ن = ا_ن ل_{ن-۱} - ب_ن ل_{ن-۲}$

۲- $\left(\frac{۲لا+۱}{۲لا}\right)^۲$ کو ایک ایسی مسلسل کسر کی شکل میں لاؤ جس میں سب شمار کنندگاں ایک کے مساوی ہوں۔

۳- ثابت کرو کہ

(۱) $\sqrt{ا^۲+ب} = ا + \frac{ب}{۲ا+}\;\frac{ب}{۲ا+}\cdots\cdots$

(۲) $\sqrt{ا^۲-ب} = ا - \frac{ب}{۲ا-}\;\frac{ب}{۲ا-}\cdots\cdots$

۴- کسر مسلسل $\frac{ب_۱}{ا_۱-}\;\frac{ب_۲}{ا_۲-}\;\frac{ب_۳}{ا_۳-}\cdots$ میں اگر ہر ایک جزو ترکیبی کا نسب نما شمار کنندہ سے کم از کم بقدر ایک کے بڑا ہو تو ثابت کرو کہ $ق_ن$ اور $ل_ن$ کی قیمت ن کے ساتھ بڑھتی ہے۔

۵- اگر $ا_۱، ا_۲، ا_۳ \ldots ا_ن$ سلسلۂ موسیقیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{ا_ن}{ا_{ن-۱}} = \frac{۱}{۲-}\;\frac{۱}{۲-}\;\frac{۱}{۲-}\cdots\cdots\frac{۱}{۲-}\;\frac{ا_۲}{ا_۱}$$

۶- ثابت کرو کہ

$$\left(\text{ا}+\frac{1}{\text{۲ا}+}\,\frac{1}{\text{۲ا}+}\cdots\right)^2+\left(\text{ا}-\frac{1}{\text{۲ا}-}\,\frac{1}{\text{۲ا}-}\cdots\right)^2=\text{۲ا}^2$$

اور

$$\left(\text{ا}+\frac{1}{\text{۲ا}+}\,\frac{1}{\text{۲ا}+}\cdots\right)\left(\text{ا}-\frac{1}{\text{۲ا}-}\,\frac{1}{\text{۲ا}-}\cdots\right)=\text{ا}^2-\frac{1}{\text{۲ا}^2-}\,\frac{1}{\text{۲ا}^2-}\cdots$$

۷- کسر مسلسل

$$\frac{\text{ب}}{\text{ا}+}\,\frac{\text{ب}}{\text{ا}+}\,\frac{\text{ب}}{\text{ا}+}\cdots$$

میں ثابت کرو کہ

$$\text{ق}_{\text{ن}+1}=\text{ب ل}_{\text{ن}}\quad\text{اور}\quad\text{ب ل}_{\text{ن}+1}-\text{ا ق}_{\text{ن}+1}=\text{ب}^2\,\text{ل}_{\text{ن}-1}$$

۸- ثابت کرو کہ $\frac{\text{ب}}{\text{ا}+}\,\frac{\text{ب}}{\text{ا}+}\,\frac{\text{ب}}{\text{ا}+}\cdots=\text{ب}\times\frac{\text{عہ}^{\text{لا}}-\text{بہ}^{\text{لا}}}{\text{عہ}^{\text{لا}+1}-\text{بہ}^{\text{لا}+1}}$ جہاں لا، اجزائے ترکیبی کی تعداد کو ظاہر کرتا ہے. اور عہ اور بہ مساوات

$$\text{ک}^2-\text{اک}-\text{ب}=0$$

کی اصلیں ہیں۔

۹- ثابت کرو کہ مسلسل کسروں

$$\text{ا}+\frac{1}{\text{ب}+}\,\frac{1}{\text{ج}+}\,\frac{1}{\text{د}+}\,\frac{1}{\text{ا}+}\cdots\quad\text{اور}\quad-\text{د}+\frac{1}{-\text{ج}+}\,\frac{1}{-\text{ب}+}\,\frac{1}{-\text{ا}+}\,\frac{1}{-\text{د}+}\cdots$$

کا حاصل ضرب −۱ ہے۔

۱۰- ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{1-}\,\frac{4}{5-}\,\frac{9}{13-}\,\frac{16}{25-}\cdots\frac{(\text{ن}-1)^2}{\text{ن}^2+(\text{ن}+1)^2}=\frac{(\text{ن}+1)(\text{ن}+2)(\text{۲ن}+3)}{6}$$

۱۱-

$$\frac{2}{1-}\,\frac{3}{5-}\,\frac{8}{7-}\cdots\frac{\text{ن}^2-1}{\text{۲ن}+1}=\frac{\text{ن}(\text{ن}+3)}{2}$$

۱۲-

$$\frac{2}{2-}\,\frac{3}{3-}\,\frac{4}{4-}\cdots\frac{\text{ن}+1}{\text{ن}+1-}\,\frac{\text{ن}+2}{\text{ن}+2}=1+1+\lfloor 2+\lfloor 3+\cdots+\lfloor \text{ن}$$

۱۳- $\frac{۱}{۱-}\ \frac{۱}{۳-}\ \frac{۲}{۴-}\ \frac{۳}{۵-} \ldots\ \frac{\text{ن} - ۱}{\text{ن} + ۱ -} \ldots = \text{و} - ۱$

۱۴- $\frac{۴}{۱+}\ \frac{۶}{۲+}\ \frac{۸}{۳+} \ldots\ \frac{۲\text{ن} + ۲}{\text{ن} +} \ldots = \frac{۲(\text{و}^۲ - ۱)}{\text{و}^۲ + ۱}$

۱۵- $\frac{۳ \times ۳}{۱+}\ \frac{۴ \times ۳}{۲+}\ \frac{۵ \times ۳}{۳+} \ldots\ \frac{۳(\text{ن} + ۲)}{\text{ن} +} \ldots = \frac{۲۱۶(\text{و}^۳ + ۱)}{۵\text{و}^۳ - ۲}$

۱۶- اگر $\text{ع}_۱ = \frac{\text{ا}}{\text{ب}}$ ، $\text{ع}_۲ = \frac{\text{ب}}{\text{ا} + \text{ب}}$ ، $\text{ع}_۳ = \frac{\text{ا} + \text{ب}}{\text{ا} + ۲\text{ب}}$ ...... (جہاں متواتر کسریں اس کلیہ کے مطابق بنتی ہیں: کسی ایک کسر کا شمار کنندہ کسر ماقبل کے نسب نما کے مساوی ہے اور نسب نما کسر ماقبل کے شمار کنندہ اور نسب نما کے حاصل جمع کے مساوی ہے) تو ثابت کرو کہ $\text{ع}_\infty = \frac{\sqrt{۵} - ۱}{۲}$

۱۷- ثابت کرو کہ مسلسل کسر

$\frac{\text{ر}}{\text{ر} + ۱ -}\ \frac{\text{ر}}{\text{ر} + ۱ -}\ \frac{\text{ر}}{\text{ر} + ۱ -} \ldots$ کا ن واں مستدق

$\frac{\text{ر}^{\text{ن}+۱} - \text{ر}}{\text{ر}^{\text{ن}+۱} - ۱}$ ہے۔

۱۸- $\frac{\text{ا}_۱}{\text{ا}_۱ + ۱ -} - \frac{\text{ا}_۲}{\text{ا}_۲ + ۱ -}\ \frac{\text{ا}_۳}{\text{ا}_۳ + ۱ -} \ldots$ کی قیمت دریافت کرو جہاں $\text{ا}_۱$، $\text{ا}_۲$، $\text{ا}_۳$ ..... مثبت ہے اور ایک سے بڑا ہے۔

۱۹- ثابت کرو کہ

$۱ - \frac{۱}{۴-}\ \frac{۱}{۴-} \ldots$

کا ن واں مستدق، کسر مسلسل $\frac{۱}{۱+}\ \frac{۱}{۲+}\ \frac{۱}{۱+}\ \frac{۱}{۲+} \ldots$ کے (۲ن - ۱) ویں مستدق کے مساوی ہے۔

۲۰۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{۱}{-۵}\ \frac{۱}{-۲}\ \frac{۱}{-۱}\ \frac{۱}{-۵}\ \frac{۱}{-۲}\ \frac{۱}{-۱}\ \frac{۱}{-۵}\ \cdots\cdots$$

کا ۳ ن واں مستدق $\frac{\text{ن}}{\text{۳ن}+۱}$ ہے۔

۲۱۔ ثابت کرو کہ $\frac{۱}{+۲}\ \frac{۲}{+۳}\ \frac{۳}{+۴}\ \cdots\cdots = \frac{۳-\text{و}}{\text{و}-۲}$

اور اس سے حاصل کرو کہ و کی قیمت $۲\frac{۲}{۳}$ اور $۲\frac{۸}{۱۱}$ کے درمیان واقع ہے۔

سلسلوں کی تحویل مسلسل کسروں میں

۴۷۔ یہاں سلسلہ کو ذیل کی شکل

$$\frac{۱}{\text{ع}_۱} + \frac{۱}{\text{ع}_۲} + \frac{۱}{\text{ع}_۳} + \cdots\cdots + \frac{۱}{\text{ع}_\text{ن}}$$

میں لکھنا سہولت بخش ہے۔

رکھو

$$\frac{۱}{\text{ع}_\text{ر}} + \frac{۱}{\text{ع}_{\text{ر}+۱}} = \frac{۱}{\text{ع}_\text{ر} + \text{لا}_\text{ر}}$$

تب

$$(\text{ع}_\text{ر} + \text{لا}_\text{ر})(\text{ع}_{\text{ر}+۱} + \text{ع}_\text{ر}) = \text{ع}_\text{ر}\,\text{ع}_{\text{ر}+۱}$$

$$\therefore \text{لا}_\text{ر} = -\frac{\text{ع}_\text{ر}^۲}{\text{ع}_\text{ر} + \text{ع}_{\text{ر}+۱}}$$

$$\therefore \frac{۱}{\text{ع}_۱} + \frac{۱}{\text{ع}_۲} = \cfrac{۱}{\text{ع}_۱ - \cfrac{\text{ع}_۱^۲}{\text{ع}_۱ + \text{ع}_۲}} = \frac{۱}{\text{ع}_۱ -}\ \frac{\text{ع}_۱^۲}{\text{ع}_۱ + \text{ع}_۲}$$

اسی طرح سے

$$\frac{1}{\text{ع}_1}+\frac{1}{\text{ع}_2}+\frac{1}{\text{ع}_3}=\frac{1}{\text{ع}_1}+\frac{1}{\text{ع}_2+\text{لا}}=\frac{1}{\text{ع}_1}-\frac{\text{ع}_1^2}{\text{ع}_1+\text{ع}_2+\text{لا}}$$

$$=\frac{1}{\text{ع}_1-}\;\frac{\text{ع}_1^2}{\text{ع}_1+\text{ع}_2-}\;\frac{\text{ع}_2^2}{\text{ع}_2+\text{ع}_3}$$

اور علیٰ ہذالقیاس ، اس لئے عام طور پر

$$\frac{1}{\text{ع}_1}+\frac{1}{\text{ع}_2}+\frac{1}{\text{ع}_3}+\cdots\cdots+\frac{1}{\text{ع}_\text{ن}}$$

$$=\frac{1}{\text{ع}_1-}\;\frac{\text{ع}_1^2}{\text{ع}_1+\text{ع}_2-}\;\frac{\text{ھ}_2^2}{\text{ع}_2+\text{ع}_3-}\cdots\frac{\text{ع}_{\text{ن}-1}^2}{\text{ع}_{\text{ن}-1}+\text{ع}_\text{ن}}$$

مثال ۱۔ سلسلۂ ذیل

$$\frac{1}{\text{ا}_0}-\frac{\text{لا}}{\text{ا}_0\text{ا}_1}+\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}_0\text{ا}_1\text{ا}_2}-\cdots\cdots+(-1)^\text{ن}\frac{\text{لا}^\text{ن}}{\text{ا}_0\text{ا}_1\text{ا}_2\cdots\text{ا}_\text{ن}}$$

کو کسر مسلسل کی شکل میں لاؤ۔

$$\frac{1}{\text{ا}_\text{ن}}-\frac{\text{لا}}{\text{ا}_\text{ن}\text{ا}_{\text{ن}+1}}=\frac{1}{\text{ا}_\text{ن}+\text{ب}_\text{ن}}$$ رکھو

تب $(\text{ا}_\text{ن}+\text{ب}_\text{ن})(\text{ا}_{\text{ن}+1}-\text{لا})=\text{ا}_\text{ن}\text{ا}_{\text{ن}+1}$

$$\therefore\ \text{ب}_\text{ن}=\frac{\text{ا}_\text{ن}\text{لا}}{\text{ا}_{\text{ن}+1}-\text{لا}}$$

اس لئے $\frac{1}{\text{ا}_0}-\frac{\text{لا}}{\text{ا}_0\text{ا}_1}=\frac{1}{\text{ا}_0+\text{ب}_0}=\frac{1}{\text{ا}_0+}\;\frac{\text{ا}_0\text{لا}}{\text{ا}_1-\text{لا}}$

نیز $\frac{1}{\text{ا}_0}-\frac{\text{لا}}{\text{ا}_0\text{ا}_1}+\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}_0\text{ا}_1\text{ا}_2}=\frac{1}{\text{ا}_0}-\frac{\text{لا}}{\text{ا}_0}\left(\frac{1}{\text{ا}_1}-\frac{\text{لا}}{\text{ا}_1\text{ا}_2}\right)$

$$= \frac{1}{\text{ا}_1} - \frac{\text{لا}}{\text{ا}_1(\text{ا}_1+\text{ما}_1)} = \frac{1}{\text{ا}_1 +}\ \frac{\text{ا}_1\text{لا}}{\text{ا}_1+\text{ما}_1-\text{لا}}$$

$$= \frac{1}{\text{ا}_1 +}\ \frac{\text{ا}_1\text{لا}}{\text{ا}_2-\text{لا}+}\ \frac{\text{ا}_2\text{لا}}{\text{ا}_3-\text{لا}}$$

اور عام طور پر $\frac{1}{\text{ا}_1} - \frac{\text{لا}}{\text{ا}_1\text{ا}_2} + \frac{\text{لا}^2}{\text{ا}_1\text{ا}_2\text{ا}_3} - \cdots\cdots + (-1)^{\text{ن}} \frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{\text{ا}_1\text{ا}_2\text{ا}_3\cdots\text{ا}_{\text{ن}}}$

$$= \frac{1}{\text{ا}_1 +}\ \frac{\text{ا}_1\text{لا}}{\text{ا}_2-\text{لا}+}\ \frac{\text{ا}_2\text{لا}}{\text{ا}_3-\text{لا}+}\cdots\cdots \frac{\text{ا}_{\text{ن}-1}\text{لا}}{\text{ا}_{\text{ن}}-\text{لا}}$$

مثال ۲۔ لوک (۱ + لا) کو مسلسل کسر کی شکل میں تحویل کرو۔

ہم جانتے ہیں کہ لوک (۱ + لا) $= \text{لا} - \frac{\text{لا}^2}{2} + \frac{\text{لا}^3}{3} - \frac{\text{لا}^4}{4} + \cdots$

سلسلۂ ذیل

$$\frac{\text{لا}}{\text{ا}_1} - \frac{\text{لا}^2}{\text{ا}_2} + \frac{\text{لا}^3}{\text{ا}_3} - \frac{\text{لا}^4}{\text{ا}_4} + \cdots\cdots\cdots$$

کے مساوی جو کسر مسلسل ہے اس سے مطلوبہ کسر مسلسل بآسانی حاصل ہو سکتی ہے۔

رکھو $\frac{1}{\text{ا}_{\text{ن}}} - \frac{\text{لا}}{\text{ا}_{\text{ن}+1}} = \frac{1}{\text{ا}_{\text{ن}} + \text{ما}_{\text{ن}}}$

جس سے $\text{ما}_{\text{ن}} = \frac{\text{ا}_{\text{ن}}^2\,\text{لا}}{\text{ا}_{\text{ن}+1} - \text{ا}_{\text{ن}}\text{لا}}$

پس $\frac{\text{لا}}{\text{ا}_1} - \frac{\text{لا}^2}{\text{ا}_2} + \frac{\text{لا}^3}{\text{ا}_3} - \frac{\text{لا}^4}{\text{ا}_4} + \cdots\cdots$

$$= \frac{\text{لا}}{\text{ا}_1 +}\ \frac{\text{ا}_1^2\text{لا}}{\text{ا}_2-\text{ا}_1\text{لا}+}\ \frac{\text{ا}_2^2\text{لا}}{\text{ا}_3-\text{ا}_2\text{لا}+}\ \frac{\text{ا}_3^2\text{لا}}{\text{ا}_4-\text{ا}_3\text{لا}+}\cdots$$

$$\therefore \text{لوک}\,(۱+\text{لا}) = \frac{\text{لا}}{۱+}\;\frac{۱^۲\,\text{لا}}{۲-\text{لا}+}\;\frac{۲^۲\,\text{لا}}{۳-۲\,\text{لا}+}\;\frac{۳^۲\,\text{لا}}{۴-۳\,\text{لا}+}\;\cdots\cdots$$

۴۴۸۔ بعض صورتوں میں ہم مسلسل کسر کے اجزائے ترکیبی کو ذیل کے مسئلہ کی مدد سے مختصر کر سکتے ہیں

کسر مسلسل

$$\frac{ب_۱}{ا_۱+}\;\frac{ب_۲}{ا_۲+}\;\frac{ب_۳}{ا_۳+}\;\frac{ب_۴}{ا_۴+}\;\cdots\cdots\cdots$$

ذیل کی کسر مسلسل

$$\frac{ج_۱ ب_۱}{ج_۱ ا_۱+}\;\frac{ج_۱ ج_۲ ب_۲}{ج_۲ ا_۲+}\;\frac{ج_۲ ج_۳ ب_۳}{ج_۳ ا_۳+}\;\frac{ج_۳ ج_۴ ب_۴}{ج_۴ ا_۴+}$$

کے مساوی ہے جہاں $ج_۱$، $ج_۲$، $ج_۳$، $ج_۴$ ..... کی قیمتیں کچھ بھی ہو سکتی ہیں

$\frac{ب_۲}{ا_۲+}\;\frac{ب_۳}{ا_۳+}$ ..... کو $ک_۱$ سے تعبیر کرو، تب کسر مسلسل

$$= \frac{ب_۱}{ا_۱+ک_۱} = \frac{ج_۱ ب_۱}{ج_۱ ا_۱+ج_۱ ک_۱}$$

$\frac{ب_۳}{ا_۳+}\;\frac{ب_۴}{ا_۴+}$ ..... کو $ک_۲$ سے تعبیر کرو، تب

$$ج_۱ ک_۱ = \frac{ج_۱ ب_۲}{ا_۲+ک_۲} = \frac{ج_۱ ج_۲ ب_۲}{ج_۲ ا_۲+ج_۲ ک_۲}$$

اسی طرح $ج_۲ ک_۲ = \frac{ج_۲ ج_۳ ب_۳}{ج_۳ ا_۳+ج_۳ ک_۳}$، اور علیٰ ہذا القیاس،

پس مسئلہ ثابت ہوا۔

امثلہ نمبری ۳۱ (ب)

ثابت کرو کہ

۱۔ $\frac{1}{\text{ع}_0} - \frac{1}{\text{ع}_1} + \frac{1}{\text{ع}_2} - \frac{1}{\text{ع}_3} + \cdots + (-1)^{\text{ن}} \frac{1}{\text{ع}_{\text{ن}}}$

$= \frac{1}{\text{ع}_0 +} \frac{\text{ع}_0^2}{\text{ع}_1 - \text{ع}_0 +} \frac{\text{ع}_1^2}{\text{ع}_2 - \text{ع}_1 +} \cdots \frac{\text{ع}_{\text{ن}-1}^2}{\text{ع}_{\text{ن}} - \text{ع}_{\text{ن}-1}}$

۲۔ $\frac{1}{\text{ا}_0} + \frac{\text{لا}}{\text{ا}_0 \text{ا}_1} + \frac{\text{لا}^2}{\text{ا}_0 \text{ا}_1 \text{ا}_2} + \cdots + \frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{\text{ا}_0 \text{ا}_1 \text{ا}_2 \cdots \text{ا}_{\text{ن}}}$

$= \frac{1}{\text{ا}_0 -} \frac{\text{ا}_0 \text{لا}}{\text{ا}_1 + \text{لا} -} \frac{\text{ا}_1 \text{لا}}{\text{ا}_2 + \text{لا} -} \cdots \frac{\text{ا}_{\text{ن}-1} \text{لا}}{\text{ا}_{\text{ن}} + \text{لا}}$

۳۔ $\frac{\text{ل} - 1}{\text{ل} - 2} = \frac{\text{ل}}{\text{ل} -} \frac{\text{ل} + 1}{\text{ل} + 1 -} \frac{\text{ل} + 2}{\text{ل} + 2 -} \cdots\cdots$

۴۔ $\frac{2\text{ن}}{\text{ن} + 1} = \frac{1}{1 -} \frac{1}{4 -} \frac{1}{1 -} \frac{1}{4 -} \cdots$ ن خارج قسمتوں تک

۵۔ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{\text{ن} + 1} = \frac{1}{1 -} \frac{1}{3 -} \frac{4}{5 -} \frac{9}{7 -} \cdots \frac{\text{ن}^2}{(2\text{ن} + 1)}$

۶۔ $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{(\text{ن} + 1)^2} = \frac{1}{1 -} \frac{1^4}{1^2 + 2^2 -} \cdots \frac{\text{ن}^4}{\text{ن}^2 + (\text{ن} + 1)^2}$

۷۔ $\text{و}^{\text{لا}} = 1 + \frac{\text{لا}}{1 -} \frac{\text{لا}}{2 + \text{لا} -} \frac{2\text{لا}}{3 + \text{لا} -} \frac{3\text{لا}}{4 + \text{لا} -} \cdots\cdots$

۸۔ $\frac{1}{\text{ا}} - \frac{1}{\text{اب}} + \frac{1}{\text{ابج}} - \frac{1}{\text{ابجد}} + \cdots = \frac{1}{\text{ا} +} \frac{\text{ا}}{\text{ب} - 1 +} \frac{\text{ب}}{\text{ج} - 1 +} \frac{\text{ج}}{\text{د} - 1 +} \cdots\cdots$

۹- $۱ + \frac{۱}{ر} + \frac{۱}{ر^{۴}} + \frac{۱}{ر^{۹}} + \frac{۱}{ر^{۱۶}} + \cdots = ۱ + \frac{۱}{ر-}\;\frac{ر}{ر^{۳}+۱-}\;\frac{ر^{۳}}{ر^{۵}+۱-}\;\frac{ر^{۵}}{ر^{۷}+۱-}\cdots$

۱۰- $\frac{ا_{۱}}{ا_{۱}+}\;\frac{ا_{۲}}{ا_{۲}+}\;\frac{ا_{۳}}{ا_{۳}+}\cdots\frac{ا_{ن}}{ا_{ن}} = \frac{۱}{۱+}\;\frac{۱}{ا_{۱}+}\;\frac{ا_{۱}}{ا_{۲}+}\;\frac{ا_{۲}}{ا_{۳}+}\cdots\frac{ا_{ن-۲}}{ا_{ن-۱}}$

۱۱- اگر $ف = \frac{ا}{ا+}\;\frac{ب}{ب+}\;\frac{ج}{ج+}\cdots$ اور $ق = \frac{ا}{ب+}\;\frac{ب}{ج+}\;\frac{ج}{د+}\cdots$
تو ثابت کرو کہ

$$ف\,(ا + ۱ + ق) = ا + ق$$

۱۲- ثابت کرو کہ $\frac{۱}{ل_{۱}} - \frac{لا}{ل_{۱}ل_{۲}} + \frac{لا^{۲}}{ل_{۲}ل_{۳}} - \frac{لا^{۳}}{ل_{۳}ل_{۴}} + \cdots$
مسلسل کسر $\frac{۱}{ا_{۱}+}\;\frac{لا}{ا_{۲}+}\;\frac{لا}{ا_{۳}+}\;\frac{لا}{ا_{۴}+}\cdots$ کے مساوی ہے جہاں
$ل_{۱}$، $ل_{۲}$، $ل_{۳}$ .... مسلسل متقربوں کے نسب نما ہیں۔

بتیسواں باب

احتمال

۴۴۹۔ اگر کوئی واقعہ ا طریقوں سے واقع ہو سکے اور ب طریقوں سے واقع نہ ہو سکے جبکہ (وقوع اور عدم وقوع دونوں کے) ہر طریقہ کا امکان مساوی ہو تو اس کو یوں بیان کرتے ہیں کہ اس واقعہ کے وقوع کا احتمال یا اتفاق $\frac{ا}{ا+ب}$ ہے اور عدم وقوع کا $\frac{ب}{ا+ب}$۔

مثلاً ایک قرعہ میں ۷ انعام ہیں اور باقی ۲۵ خالی ہیں، اگر ایک شخص کے پاس ایک ٹکٹ ہو تو اس کے ایک انعام حاصل کرنے کا اتفاق $\frac{۷}{۳۲}$ ہے اور اس کے محروم رہنے کا اتفاق $\frac{۲۵}{۳۲}$ ہے۔

۴۵۰۔ ریاضی میں احتمال کی مندرجہ بالا تعریف کے وجوہ ذیل کے امور پر غور کرنے سے بخوبی واضح ہو جائینگے۔

اگر ایک واقعہ ا طریقوں سے واقع ہو سکے اور ب طریقوں سے واقع نہ ہو سکے جبکہ ہر طریقہ کا امکان مساوی ہو تو اس کے وقوع کے اتفاق کی نسبت اس کے عدم وقوع کے اتفاق کے ساتھ ا:ب ہے، پس اگر واقع ہونے کے اتفاق کو م ا سے تعبیر کیا جائے تو واقع نہ ہونے کے اتفاق کو م ب سے تعبیر کیا جائیگا جہاں م کوئی نا معلوم مستقل عدد ہے۔

∴ وقوع کا اتفاق + عدم وقوع کا اتفاق = م (ا + ب) لیکن ان دو میں سے ایک نہ ایک بات کا ہونا لازمی ہے کہ یا واقعہ واقع ہوگا یا نہ ہوگا۔ لہٰذا ضرور ہے کہ واقع ہونے کے اتفاق اور واقع نہ ہونے کے اتفاق کا حاصل جمع ایک مقدار یقینی کو تعبیر کرے، پس اگر ہم اس مقدار کو اکائی فرض کریں تو

$$ا = م (ا + ب) \text{ یعنی } م = \frac{ا}{ا + ب}$$

∴ واقعہ کے واقع ہونے کا اتفاق $= \frac{ا}{ا + ب}$

اور واقع نہ ہونے کا اتفاق $= \frac{ب}{ا + ب}$

نتیجہ صریح ۔ اگر کسی واقعہ کے وقوع کا احتمال ق ہو تو اسکے عدم وقوع کا احتمال ا ۔ ق ہوگا۔

۱۵۴ ۔ یہ کہنے کی بجائے کہ کسی واقعہ کے وقوع کا اتفاق $\frac{ا}{ا + ب}$ ہے اس کو بعض اوقات یوں بھی بیان کرتے ہیں کہ واقعہ کے موافق امکان ا : ب ہے اور خلاف ب : ا ہے۔

احتمال کی تعریف مندرجہ دفعہ ۴۹۴ قدرے مختلف شکل میں بھی دیجا سکتی ہے جو بعض اوقات مفید ثابت ہوتی ہے اگر امکان کی کل صورتوں کی مجموعی تعداد ج ہو اور ہر صورت کا امکان مساوی ہو تو وقوع کا احتمال $\frac{ا}{ج}$ سے اور عدم وقوع کا احتمال ا ۔ $\frac{ا}{ج}$ سے تعبیر ہوتا ہے۔

مثال ا ۔ ایک معمولی مہرہ کے چھہ رخوں پر ایک سے چھہ تک کے ہندسے

مندرج ہیں۔ اگر اس کو پھینکا جائے تو بتاؤ کہ ۴ سے بڑا عدد نکلنے کا احتمال کیا ہے؟

مہرہ کے گرنے کے کل مختلف طریقے ۶ ہیں اور ان میں سے ۲ موافق ہیں۔

∴ مطلوبہ احتمال $= \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳}$

مثال ۲۔ ایک تھیلی میں ۴ سفید گیند ہیں اور ۵ سیاہ، ایک شخص بن دیکھے ان میں سے ۳ گیند نکالتا ہے۔ بتاؤ کہ ان گیندوں کے سب سیاہ ہونے کے خلاف کیا امکان ہیں۔

تین گیند نکالنے کے کل طریقے $^{۹}ج_{۳}$ ہیں، اور تین سیاہ گیند نکالنے کے کل طریقے $^{۵}ج_{۳}$ ہیں۔ اس لئے تین سیاہ گیند نکالنے کا احتمال

$$= \frac{^{۵}ج_{۳}}{^{۹}ج_{۳}} = \frac{۳ \times ۴ \times ۵}{۷ \times ۸ \times ۹} = \frac{۵}{۴۲}$$

پس واقعہ کے خلاف امکان ۳۷ : ۵ ہے۔

مثال ۳۔ دو مہرے ایک ساتھ پھینکے گئے ہیں، بتاؤ کہ کم از کم ایک یکّہ نکلنے کا کیا احتمال ہے۔

کل ممکن صورتوں کی تعداد ۶ × ۶ = ۳۶ ہے۔

ایک مہرہ پر کا یکّہ دوسرے مہرہ پر کے چھ عددوں میں سے کسی ایک کے ساتھ اکٹھا نکل سکتا ہے اور پہلے مہرہ پر کے باقی ۵ عددوں میں سے ہر ایک عدد باقی دوسرے مہرہ کے یکّہ کے ساتھ نکل سکتا ہے۔ پس موافق صورتیں صرف ۱۱ ہیں۔

اس لئے مطلوبہ احتمال $\frac{۱۱}{۳۶}$ ہے

ہم یوں بھی استدلال کر سکتے ہیں:۔

ہر ایک مہرہ کو اس طرح پھینکنے کے لئے کہ یکّہ نہ نکلے پانچ طریقے ہیں۔ پس مہروں کے ۲۵ "افتاد" ایسے ہیں جس میں یکّہ نہیں نکلیگا

یعنی کم از کم ایک یکہ کی اُفتاد کا احتمال ۱ - $\frac{۲۵}{۳۶}$ یا $\frac{۱۱}{۳۶}$ ہے۔

مثال ۴۔ تین مہرے ایک ساتھ پھینکے گئے ہیں، بتاؤ کہ ۱۵ سے زیادہ نکلنے کا کیا احتمال ہے۔

جس اُفتاد میں ۱۸ نکل سکتے ہیں وہ ۶، ۶، ۶ سے بنی ہوتی ہے اور یہ صرف ایک ہی طریقہ سے ہو سکتا ہے۔ ۱۷ چونکہ ۶، ۶، ۵ سے بنتا ہے، اس لئے یہ صرف ۳ طریقوں سے ہو سکتا ہے، اسی طرح ۱۶ اعداد ۶، ۶، ۴ اور ۶، ۵، ۵ سے بن سکتا ہے اور ہر ایک جُٹ ۳ طرح سے واقع ہو سکتا ہے۔

پس موافق صورتوں کی کل تعداد ۱ + ۳ + ۶ = ۱۰ ہے اور کل صورتیں ۶ × ۶ × ۶ یعنی ۲۱۶ ہے۔

لہٰذا مطلوبہ احتمال = $\frac{۱۰}{۲۱۶}$ = $\frac{۵}{۱۰۸}$

مثال ۵۔ ایک ایسے قرعہ میں جس میں ۳ انعام ہیں اور ۶ خالی ہیں ا کے تین حصے ہیں، ایک دوسرے قرعہ میں جس میں ایک انعام ہے اور ۲ خالی ہیں ب کا ایک حصہ ہے، ثابت کرو کہ ا کی کامیابی کے احتمال کو ب کی کامیابی کے احتمال کے ساتھ نسبت ۱۶ : ۷ ہے۔

ا کے تین انعام حاصل کرنے کا طریقہ ایک ہے۔

ا کے دو انعام اور ایک خالی حاصل کرنیکے طریقے $\frac{۳ \times ۲}{۲ \times ۱} \times ۶$ ہیں،

ا کے ایک انعام اور دو خالی حاصل کرنیکے طریقے $۳ \times \frac{۶ \times ۵}{۱ \times ۲}$ ہیں۔

اِن کل طریقوں کا حاصل جمع ۶۴ ہے جو ا کے کم از کم ایک انعام حاصل کرنے کے کل طریقوں کو تعبیر کرتا ہے۔ نیز ا تین

ٹکٹ $\frac{۹\times۸\times۷}{۱\times۲\times۳}$ یعنی ۸۴ طریقوں سے حاصل کر سکتا ہے

پس ا کی کامیابی کا احتمال $\frac{۶۴}{۸۴} = \frac{۱۶}{۲۱}$ ہے۔

نیز ب کی کامیابی کا احتمال صریحاً $\frac{۱}{۳}$ ہے،

پس ا کی کامیابی کا احتمال : ب کی کامیابی کا احتمال $= \frac{۱۶}{۲۱} : \frac{۱}{۳} = ۱۶ : ۷$

ہم اس طرح بھی استدلال کر سکتے تھے:۔

ا کے تمام خالی $\frac{۶\times۵\times۴}{۱\times۲\times۳}$ یعنی ۲۰ طریقوں سے نکلینگے۔ اسلئے

ا کے محروم رہنے کا احتمال $\frac{۲۰}{۸۴}$ یعنی $\frac{۵}{۲۱}$ ہے۔

پس ا کی کامیابی کا احتمال $= ۱ - \frac{۵}{۲۱} = \frac{۱۶}{۲۱}$

۴۵۳۔ فرض کرو کہ ا، ب، ج، ..... ایسے واقعات ہیں کہ ان میں سے ایک اور صرف ایک کا واقع ہونا لازمی ہے، نیز فرض کرو کہ یہ واقعات بالترتیب ا_1، ب_1، ج_1، ..... طریقوں سے واقع ہو سکتے ہیں اور ان طریقوں میں سے ہر ایک کا امکان مساوی ہے، ہر ایک واقعہ کے وقوع کا احتمال دریافت کرو۔

مساوی امکان کے سب طریقوں کا مجموعہ $\text{ا}_1 + \text{ب}_1 + \text{ج}_1 + \ldots$ ہے ان میں سے وہ طریقے جو ا کے موافق ہیں ا_1 ہیں۔ پس

ا کے وقوع کا احتمال $\frac{\text{ا}_1}{\text{ا}_1 + \text{ب}_1 + \text{ج}_1 + \ldots}$ ہے اسی طرح سے

ب کے وقوع کا احتمال $\frac{\text{ب}_1}{\text{ا}_1 + \text{ب}_1 + \text{ج}_1}$ ہے، وغیرہ وغیرہ

۴۵۴۔ جو مثالیں ہم نے اوپر درج کی ہیں اُن سے ظاہر ہے کہ احتمال کے آسان سوالات کے حل کرنے میں صرف احتمال کی تعریف اور ترتیب و اجتماع کے اصولوں کے جاننے کی ضرورت ہے۔

امثلہ نمبری ۳۲ (ا)

۱- بتاؤ کہ دو مہروں کو ایک ساتھ پھینکنے سے (۱) پانچ (۲) چھ نکلنے کا کیا احتمال ہے

۲- تاش کے ۵۲ پتوں سے کوئی دو پتے نکالے گئے ہیں، بتاؤ کہ ایک کے غلام اور دوسرے کے بیگم ہونیکا کیا احتمال ہے

۳- ایک تھیلی میں ۵ سفید، ۳ سیاہ اور ۴ سرخ گیند ہیں۔ اگر ۳ گیند علی الحساب نکالے جائیں تو ان تینوں کے سفید ہونے کا کیا احتمال ہے۔

۴- چار سکوں کو اوپر اچھالا گیا ہے بتاؤ کہ دو مورتوں اور دو زنجیروں کے نکلنے کا کیا احتمال ہے؟

۵- دو واقعات ایسے ہیں کہ ان میں ایک ضرور واقع ہوگا۔ اگر یہ معلوم ہو کہ ایک کا احتمال دوسرے کے احتمال کا دو تہائی ہے تو بتاؤ کہ دوسرے واقعہ کے موافق کیا امکان ہے؟

۶- ایک تاش میں سے ۴ پتے لئے گئے ہیں، بتاؤ کہ ان کے ایک ہی "رنگ" کے چار افسر ہونے کا کیا احتمال ہے

۷- ۱۳ آدمی ایک گول میز کے گرد بیٹھے ہیں، بتاؤ کہ دو خاص آدمیوں کے پاس پاس بیٹھنے کے خلاف امکان ۵:۱ ہے

۸- تین واقعات ا، ب، ج ایسے ہیں کہ ان میں سے ایک اور صرف ایک ضرور واقع ہوگا۔ اگر ا کے خلاف امکان ۸ : ۳ ہو اور ب کے خلاف امکان ۵ : ۲ ہو تو بتاؤ ج کے خلاف کیا امکان ہوگا؟

۹- ایک مہرہ کو پھینکنے سے ۴ نکلنے کا جو احتمال ہے دو مہروں کو پھینکنے سے ۸ نکلنے کا جو احتمال ہے، ۳ مہروں کو ایک ساتھ پھینکنے سے ۱۲ نکلنے کا جو احتمال ہے ان سب کا

باہم مقابلہ کرو۔

۱۰۔ ایک تاش کے ملانے میں ۴ پتے اتفاق سے گر گئے ہیں، بتاؤ ان کے جداگانہ ایک ایک رنگ کے ہونے کا کیا احتمال ہے۔

۱۱۔ ایک قرعہ میں ۴ انعام ہیں اور ۹ خالی ہیں، اس کے لئے ا کے پاس ۳ حصے ہیں، اسی طرح ایک اور قرعہ میں ۲ انعام اور ۶ خالی ہیں اور اس کے لئے ب کے پاس ۲ حصے ہیں ان کی کامیابی کے احتمال کا مقابلہ کرو۔

۱۲۔ دکھاؤ کہ ۴، ۳ اور ۲ مہروں کو پھینک کر ۶ نکالنے کے احتمال بالترتیب نسبت ۱ : ۶ : ۱۸ میں ہیں۔

۱۳۔ تین کتابیں ہیں جن میں ایک کی تین جلدیں ہیں دوسری کی چار اور تیسری کی ایک۔ ان کو علی الحساب ایک الماری میں رکھا گیا ہے بتاؤ کہ ہر ایک کتاب کی جلدوں کے اکٹھا ہونیکا احتمال $\frac{3}{140}$ ہے۔

۱۴۔ ا اور ب میں سے ہر ایک دو مہرے پھینکتا ہے، اگر ا، ۹ پھینکے تو بتاؤ کہ ب کے اس سے زیادہ پھینکنے کا کیا احتمال ہے۔

۱۵۔ لفظ "مصاحبوں" کے حروف کو جدا جدا کر کے میز پر رکھا گیا ہے، بتاؤ کہ حروف علت (ا اور و) کے پاس پاس آنے کا کیا احتمال ہے۔

۱۶۔ تاش کی ایک "ترپ" کی بازی میں جس کے پتے ایک ایک کر کے تقسیم کئے گئے ہیں بتاؤ کہ ایک خاص شخص کے پاس چار "بادشاہ" ہونے کا کیا احتمال ہے۔

۱۷۔ ۴ شلنگ اور ۳ نصف کراؤں ایک قطار میں علی الحساب رکھے گئے ہیں، بتاؤ کہ سروں پر کے دونوں سکوں کے نصف کراؤں ہونے کا احتمال $\frac{1}{7}$ ہے، اس نتیجہ کی م شلنگ اور ن نصف

گراؤں کی صورت میں تقسیم کرو۔

۴۵۵- اب تک ہم نے صرف انہی واقعات پر غور کیا ہے جنکو احتمال کی زبان میں **مفرد واقعات** سے موسوم کرتے ہیں، اگر ان میں سے دو یا زیادہ واقعات ایسے ہوں کہ ان کے وقوع باہم متعلق ہوں تو اس مشترک وقوع کو **مرکب واقعہ** کہتے ہیں۔

مثلاً فرض کرو کہ ہمارے پاس ایک تھیلی میں پانچ سفید اور آٹھ سیاہ گیند ہیں اس میں سے دو دفعہ تین تین گیند نکالے گئے ہیں، اگر ہم پہلے تین سفید گیندوں کے اور پھر تین سیاہ گیندوں کے نکالنے کا احتمال معلوم کرنا چاہیں تو ہماری بحث مرکب واقعہ سے متعلق ہوگی۔

ایسی صورت میں ممکن ہے کہ پہلی دفعہ کے نکالنے کا نتیجہ دوسری دفعہ کے نکالنے کے نتیجہ پر اثر انداز نہ ہو۔ ظاہر ہے کہ اگر ان گیندوں کو جو پہلی دفعہ نکالے گئے ہیں واپس رکھ دیا جائے تو دوسری مرتبہ کے نکالنے پر پہلی دفعہ کے نکالنے کا نتیجہ کوئی اثر نہ ڈالے گا۔ لیکن اگر گیندوں کو واپس نہ رکھا جائے تو ظاہر ہے کہ اگر پہلی دفعہ تینوں گیند سفید نکلیں تو باقی ماندہ سیاہ گیندوں کو سفید گیندوں کے ساتھ جو نسبت ہوگی وہ اس نسبت سے زیادہ ہوگی جبکہ پہلی دفعہ کے تینوں گیند سفید نہ ہوں۔ اس صورت میں دوسری مرتبہ سیاہ گیند نکالنے کا احتمال پہلی دفعہ کے نتیجہ سے اثر پذیر ہوگا۔

اس کی باقاعدہ تعریف ہم ذیل میں درج کرتے ہیں۔

اگر ایک واقعہ کا وقوع دوسرے واقعہ پر اثر انداز ہوا ہو تو ان واقعات کو واقعات تابع کہتے ہیں، لیکن اگر ایک واقعہ دوسرے واقعہ پر اثر انداز نہ ہو تو ایسے واقعات کو "غیر تابع" کہتے ہیں۔

تابع واقعات کو بعض اوقات **مشروط واقعات** بھی کہتے ہیں۔

۴۵۶- اگر دو غیر تابع واقعات میں سے بالترتیب ہر ایک کا احتمال معلوم ہو تو دونوں کے واقع ہونے کا احتمال معلوم کرو۔

فرض کرو کہ پہلا واقعہ ا طریقوں سے واقع ہوسکتا ہے اور ب طریقوں سے واقع نہیں ہوسکتا۔ نیز فرض کرو کہ دوسرا واقعہ اَ طریقوں سے واقع ہوسکتا ہے اور بَ طریقوں سے واقع نہیں ہوسکتا۔ اور ان سب طریقوں کا امکان مساوی ہے۔

پہلی (ا + ب) صورتوں میں سے ہر ایک کو دوسری (اَ + بَ) صورتوں میں سے ہر ایک کے ساتھ منسلک کیا جا سکتا ہے اس طرح ہمیں کل (ا + ب) (اَ + بَ) مرکب صورتیں حاصل ہوتی ہیں جن میں سے ہر ایک کا امکان مساوی ہے۔

ان صورتوں میں سے ا اَ میں دونوں واقعات وقوع پذیر ہوتے ہیں۔ ب بَ صورتوں میں ان میں سے کوئی واقعہ وقوع پذیر نہیں ہوتا۔ ا بَ میں پہلا واقعہ واقع ہوتا ہے اور دوسرا نہیں ہوتا، اَ ب صورتوں میں پہلا واقعہ واقع نہیں ہوتا اور دوسرا واقع ہوتا ہے۔ پس

دونوں واقعات کے وقوع پذیر ہونیکا احتمال $\frac{\text{ا اَ}}{(\text{ا}+\text{ب})(\text{اَ}+\text{بَ})}$ ہے۔

دونوں واقعات میں سے کسی کے وقوع پذیر نہ ہونیکا احتمال $\frac{\text{ب بَ}}{(\text{ا}+\text{ب})(\text{اَ}+\text{بَ})}$ ہے۔

پہلے کے واقع ہونے اور دوسرے کے واقع نہ ہونیکا احتمال $\frac{\text{ا بَ}}{(\text{ا}+\text{ب})(\text{اَ}+\text{بَ})}$ ہے۔

پہلے کے واقع نہ ہونے اور دوسرے کے واقع ہونیکا احتمال $\frac{\text{اَ ب}}{(\text{اَ}+\text{ب})(\text{اَ}+\text{بَ})}$ ہے۔

پس اگر دو غیر تابع واقعات وقوع پذیر ہونے کے احتمال بالترتیب

$ق_۱$ اور $ق_۲$ ہوں تو دونوں کے واقع ہونے کا احتمال $ق_۱ ق_۲$ ہوتا ہے۔ اسی قسم کا استدلال غیر تابع واقعات کی کسی تعداد پر عائد ہوگا۔ اس طرح آسانی سے معلوم ہو سکتا ہے کہ اگر غیر تابع واقعات کی کسی تعداد کے جداگانہ وقوع پذیر ہونے کے احتمال بالترتیب $ق_۱$، $ق_۲$، $ق_۳$ ...... ہوں تو ان سب کے وقوع پذیر ہونے کا احتمال $ق_۱ \times ق_۲ \times ق_۳$ ..... ہوگا، پہلے دو کے وقوع پذیر ہونے اور باقی کے وقوع پذیر نہ ہونے کا احتمال $ق_۱ ق_۲ (۱-ق_۳) \times (۱-ق_۴)$ ..... ہوگا اسی طرح باقی کسی ایک خاص صورت کے لئے۔

۴۵۷۔ اگر ایک امتحان میں ایک واقعہ کے وقوع پذیر ہونے کا احتمال ق ہو تو کسی متواتر ر امتحانوں میں اس کے واقع ہونے کا احتمال $ق^ر$ ہوگا۔ یہ نتیجہ دفعۂ ماقبل میں

$$ق_۱ = ق_۲ = ق_۳ = \ldots = ق$$

فرض کرنے سے فوراً واضح ہو جاتا ہے۔

یہ معلوم کرنے کے لئے کہ واقعات کی کسی تعداد میں سے کم از کم کسی ایک کے واقع ہونے کا کیا احتمال ہے ہم اس طرح غور کرتے ہیں۔ سب واقعات کے عدم وقوع کا احتمال

$(۱-ق_۱)(۱-ق_۲)(۱-ق_۳)$...... ہے، سوائے اس صورت کے باقی ہر صورت میں کوئی نہ کوئی واقعہ ضرور وقوع پذیر ہوگا۔ پس مطلوبہ احتمال

$$۱-(۱-ق_۱)(۱-ق_۲)(۱-ق_۳)\ldots$$ ہے

مثال ۱۔ ایک تھیلی میں ۵ سفید اور ۵ سیاہ گیند ہیں، تھیلی میں سے تین گیند نکالے گئے ہیں، پھر ان گیندوں کو واپس رکھ کر دوبارہ تین گیند نکالے گئے ہیں پہلی مرتبہ تینوں گیندوں کے سفید نکلنے کا

اور دوسری مرتبہ تینوں کے سیاہ نکلنے کا کیا احتمال ہے؟

جن مختلف طریقوں سے تین گیند نکالے جا سکتے ہیں ان کی کل تعداد $^{۱۳}ج_{۳}$ ہے۔

جن مختلف طریقوں سے تین سفید گیند نکالے جا سکتے ہیں انکی تعداد $^{۵}ج_{۳}$ ہے۔

جن مختلف طریقوں سے تین سیاہ گیند نکالے جا سکتے ہیں ان کی تعداد $^{۸}ج_{۳}$ ہے۔

پس پہلے امتحان میں تین سفید گیند نکلنے کا احتمال

$$= {}^{۵}ج_{۳} \div {}^{۱۳}ج_{۳} = \frac{۳\times۴\times۵}{۳\times۲\times۱} \div \frac{۱۱\times۱۲\times۱۳}{۳\times۲\times۱} = \frac{۵}{۱۴۳}$$

اور دوسرے امتحان میں تین سیاہ گیند نکلنے کا احتمال

$$= {}^{۸}ج_{۳} \div {}^{۱۳}ج_{۳} = \frac{۶\times۷\times۸}{۱۱\times۱۲\times۱۳} = \frac{۲۸}{۱۴۳}$$

لہذا مرکب واقعہ کا احتمال $= \frac{۵}{۱۴۳} \times \frac{۲۸}{۱۴۳} = \frac{۱۴۰}{۲۰۴۴۹}$

مثال ۲۔ اگر ایک سکہ کو اچھالا جائے تو بتاؤ کہ تین متواتر اچھالوں میں تصویر اور زنجیر کے متبادلاً نکلنے کا کیا احتمال ہے؟

پہلے اچھال میں تصویر نکلیگی یا زنجیر۔ دوسرے اچھال میں اس کے برعکس نکلنے کا احتمال $\frac{۱}{۲}$ ہے اور تیسرے اچھال میں پہلے اچھال کے موافق نکلنے کا احتمال $\frac{۱}{۲}$ ہے۔

پس مرکب واقعہ کا احتمال $\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۴}$ ہے۔

مثال ۳۔ ایک شخص ا کی عمر اس وقت ۳۵ سال کی ہے، اس کے ۶۵ سال کی عمر تک زندہ رہنے کے خلاف امکان ۹ : ۷ ہے، ایک اور شخص ب کی عمر اس وقت ۴۵ سال

کی ہے، اس کے ۷۵ سال کی عمر تک زندہ رہنے کے خلاف امکان ۳ : ۲ ہے۔ بتاؤ کہ کم از کم ایک شخص کے ۳۰ سال تک زندہ رہنے کا کیا احتمال ہے۔

۳۰ سال کے اندر ا کے مرجانے کا احتمال $\frac{9}{16}$ ہے۔
۳۰ سال کے اندر ب کے مرجانے کا احتمال $\frac{3}{5}$ ہے۔
پس " " " دونوں کے " " " $\frac{9}{16} \times \frac{3}{5}$ یعنی $\frac{27}{80}$ ہے
پس دونوں کے نہ مرنے کا احتمال یعنی کم از کم ایک کے زندہ رہنے کا احتمال $1 - \frac{27}{80}$ یعنی $\frac{53}{80}$ ہے۔

۴۵۸ - دفعہ ۴۵۶ کے حروف کے مفہوم میں ذرا سا تغیر کرنے سے ہم دو تابع واقعات کے ایک ساتھ وقوع پذیر ہونے کا احتمال معلوم کر سکتے ہیں۔ مثلاً فرض کرو کہ جب پہلا واقعہ ہو چکتا ہے تو اس کے تحت دوسرا واقعہ اَ طریقوں سے وقوع پذیر ہو سکتا ہے اور بَ طریقوں سے وقوع پذیر نہیں ہو سکتا، تب جن طریقوں سے دونوں واقعات اکٹھے واقع ہو سکتے ہیں ان کی تعداد ا اَ ہے، اس لئے ان کے ایک ساتھ واقع ہونے کا احتمال $\frac{ا\,اَ}{(ا+ب)(اَ+بَ)}$ ہے۔

پس اگر پہلے واقعہ کا احتمال ح ہو اور اس کے تحت دوسرے واقعہ کے وقوع پذیر ہونے کا احتمال حَ ہو تو دونوں واقعات کے ایک ساتھ واقع ہونے کا احتمال ح حَ ہوگا۔

مثال ۱ - ترپ کی بازی میں تاش کے پتے ایک ایک کرکے چار کھلاڑیوں میں تقسیم کئے گئے ہیں، بتاؤ کہ ایک خاص شخص کے پاس ترپ کا بادشاہ، اور "بیگم" دونوں کے ہونے کا کیا احتمال ہے۔

فرض کرو کہ یہ کھلاڑی ا ہے، تب ا کے پاس بادشاہ ہونیکا احتمال $\frac{۱۳}{۵۲}$ ہے کیونکہ یہ 'پتہ' ۵۲ مختلف طریقوں سے تقسیم ہو سکتا ہے اور اِن میں سے ۱۳ طریقے ا کے حصہ میں آئے ہیں، اب بادشاہ ا کے پاس آجانے کے بعد ا کے پاس 'بیگم' بھی آنے کا قرینہ $\frac{۱۲}{۵۱}$ ہے کیونکہ 'بیگم' کا پتہ باقی ۵۱ طریقوں سے تقسیم ہو سکتا ہے اور ۱۲ طریقے ا کے حصہ میں آتے ہیں۔

$$\text{پس مطلوبہ احتمال} = \frac{۱۳}{۵۲} \times \frac{۱۲}{۵۱} = \frac{۱}{۱۷}$$

یا ہم اس طرح بھی استدلال کر سکتے ہیں۔

جن مختلف طریقوں سے بادشاہ' اور بیگم' ا کے پاس آسکتے ہیں وہ اُن ترتیبوں کی تعداد کے مساوی ہیں جو ۱۳ چیزوں میں سے دو دو کو لینے سے حاصل ہوتی ہیں یعنی ان کی تعداد ۱۳ × ۱۲ ہے، اسی طرح بادشاہ اور بیگم کو تقسیم کرنے کے کُل مختلف طریقے ۵۲ × ۵۱ ہیں۔

$$\text{اس لئے مطلوبہ احتمال} = \frac{۱۳ \times ۱۲}{۵۲ \times ۵۱} = \frac{۱}{۱۷} \text{ حسب سابق}$$

مثال ۲۔ ایک تھیلی میں ۵ سفید اور ۸ سیاہ گیند ہیں۔ پہلے تھیلی میں سے تین گیند نکالے گئے ہیں، پھر اِن گیندوں کو واپس رکھنے کے بغیر اِس میں سے تین اور گیند نکالے گئے ہیں۔ پہلی مرتبہ تینوں کے سفید اور دوسری مرتبہ تینوں کے سیاہ نکلنے کا احتمال معلوم کرو۔

پہلی آزمائش میں تین گیند کل ${}^{۱۳}ج_{۳}$ طریقوں سے نکل سکتے ہیں اور تین سفید گیند ${}^{۵}ج_{۳}$ طریقوں سے نکل سکتے ہیں پس پہلی آزمائش میں تینوں گیندوں کے سفید نکلنے کا

$$\text{احتمال} = {}^{۵}ج_{۳} \div {}^{۱۳}ج_{۳} = \frac{۳ \times ۴ \times ۵}{۳ \times ۲ \times ۱} \div \frac{۱۱ \times ۱۲ \times ۱۳}{۳ \times ۲ \times ۱} = \frac{۵}{۱۴۳}$$

جب تین گیند نکال لئے جائیں تو تھیلی میں باقی ۲ سفید اور ۸ سیاہ گیند رہ جاتے ہیں۔

پس دوسری آزمائش میں تین گیند کل $^{۱۰}ج_۳$ مختلف طریقوں سے نکالے جاسکتے ہیں اور تین سیاہ گیند $^{۸}ج_۳$ مختلف طریقوں سے نکالے جاسکتے ہیں۔ پس دوسری آزمائش میں تینوں گیندوں کے سیاہ نکلنے کا احتمال

$$^{۸}ج_۳ \div {}^{۱۰}ج_۳ = \frac{۶\times۷\times۸}{۸\times۹\times۱۰} = \frac{۷}{۱۵} \text{ ہے}$$

پس مرکب واقعہ کا احتمال

$$\frac{۵}{۱۴۳} \times \frac{۷}{۱۵} = \frac{۷}{۴۲۹} \text{ ہے}$$

طالب علم کو چاہیئے کہ اس جواب کا مقابلہ دفعہ ۴۵۷ کی مثال اول کے ساتھ کرے۔

۴۵۹۔ اگر ایک واقعہ دو یا زیادہ مختلف طریقوں سے واقع ہو سکتا ہو اور یہ طریقے ایک دوسرے کے منافی ہوں تو اس کے واقع ہونے کا احتمال مختلف طریقوں سے واقع ہونے کے احتمالوں کے حاصل جمع کے مساوی ہوگا۔

اس مسئلہ کو بعض اوقات صریح اور از خود بیّن نتیجہ خیال کرتے ہیں جو احتمال کی تعریف سے ہی واضح ہے تاہم اسکو باضابطہ طور پر حسب ذیل طریقہ سے ثابت کیا جاسکتا ہے۔

فرض کرو کہ واقعہ دو ایسے طریقوں سے جو ایک ساتھ واقع نہیں ہوتے وقوع میں آسکتا ہے نیز فرض کرو کہ ان دو طریقوں سے اس کے واقع ہونے کے احتمال بالترتیب $\frac{ا_۱}{ب_۱}$ اور $\frac{ا_۲}{ب_۲}$ ہیں۔ تب $ب_۱ ب_۲$ صورتوں میں سے $ا_۱ ب_۲$ صورتیں ایسی ہیں جن میں واقعہ پہلے طریقہ سے واقع ہو سکتا ہے اور $ا_۲ ب_۱$ صورتیں ایسی ہیں

جن میں واقعۂ مذکورہ دوسرے طریقہ سے واقع ہوسکتا ہے اور یہ طریقے ایک ساتھ واقع نہیں ہوتے۔ پس فی الجملہ $\text{ب}_۱\,\text{ب}_۲$ صورتوں میں سے $\text{ا}_۱\,\text{ب}_۲ + \text{ا}_۲\,\text{ب}_۱$ صورتیں ایسی ہیں جو واقعہ کے موافق ہیں، پس واقعہ کے اِن دو طریقوں میں سے کسی ایک طریقہ سے واقع ہونے کا احتمال

$$\frac{\text{ا}_۱\,\text{ب}_۲ + \text{ا}_۲\,\text{ب}_۱}{\text{ب}_۱\,\text{ب}_۲} = \frac{\text{ا}_۱}{\text{ب}_۱} + \frac{\text{ا}_۲}{\text{ب}_۲}$$ ہے۔

ایسے باہم منافی طریقوں کی تعداد خواہ کچھ ہی ہو سب پر اسی قسم کا استدلال صادق آئے گا۔

اس لئے اگر واقعہ ن طریقوں سے واقع ہوسکتا ہو جو باہم منافی ہوں اور اگر واقعہ کے اِن مختلف طریقوں سے واقع ہونے کے احتمال بالترتیب $\text{ق}_۱$، $\text{ق}_۲$، $\text{ق}_۳$، .... $\text{ق}_\text{ن}$ ہوں تو اِن طریقوں میں سے کسی ایک سے واقع ہونے کا احتمال۔

$$\text{ق}_۱ + \text{ق}_۲ + \text{ق}_۳ + ... + \text{ق}_\text{ن}$$ ہوگا

مثال ۱۔ دو مہرے ایک ساتھ پھینکے گئے ہیں۔ اُن سے کم از کم ۹ نکلنے کا احتمال دریافت کرو۔

۹ چار طریقوں سے بن سکتا ہے، اِس لئے ۹ نکلنے کا احتمال $\frac{۴}{۳۶}$ ہے۔
۱۰ تین طریقوں سے بن سکتا ہے، اسلئے ۱۰ نکلنے کا احتمال $\frac{۳}{۳۶}$ ہے۔
۱۱ دو طریقوں سے بن سکتا ہے، اسلئے ۱۱ نکلنے کا احتمال $\frac{۲}{۳۶}$ ہے۔
۱۲ ایک طریقہ سے بن سکتا ہے، اسلئے ۱۲ نکلنے کا احتمال $\frac{۱}{۳۶}$ ہے۔

اب ۹ سے کم عدد نہ نکلنے کا احتمال اِن مختلف احتمالوں کے حاصل جمع کے مساوی ہے

$$\therefore \text{مطلوبہ احتمال} = \frac{۱+۲+۳+۴}{۳۶} = \frac{۱۰}{۳۶} = \frac{۵}{۱۸}$$

مثال ۲۔ ایک بٹوے میں ایک پونڈ ہے اور تین شلنگ، دوسرے بٹوے میں دو پونڈ ہیں اور چار شلنگ، تیسرے بٹوے میں تین پونڈ ہیں اور ایک شلنگ، اگر علی الحساب کوئی ایک بٹوا لیکر اس میں سے ایک سکہ نکالا جائے تو بتاؤ کہ سکہ کے پونڈ ہونے کا کیا احتمال ہے۔

چونکہ ہر ایک بٹوے کے لئے جانے کا امکان مساوی ہے اسلئے پہلا بٹوا لینے کا احتمال $\frac{1}{3}$ ہے اور اس میں سے نکالے ہوئے ایک سکہ کے پونڈ ہونے کا احتمال $\frac{1}{4}$ ہے، پس جہاں تک پہلے بٹوے کا تعلق ہے اس میں سے پونڈ نکالنے کا احتمال $\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ ہے اسی طرح سے دوسرے بٹوے میں سے پونڈ نکالنے کا احتمال $\frac{1}{3} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{9}$ ہے اور تیسرے میں سے نکالے ہوئے سکہ کے پونڈ ہونے کا احتمال $\frac{1}{3} \times \frac{3}{4}$ یعنی $\frac{1}{4}$ ہے۔

$$\therefore \text{مطلوبہ احتمال} = \frac{1}{12} + \frac{1}{9} + \frac{1}{4} = \frac{4}{9}$$

۲۱۸۔ دفعہ ماقبل میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ بعض اوقات کسی واقعہ کے احتمال کو دو یا زیادہ مختلف واقعات کے احتمال کے حاصل جمع کے مساوی تصور کیا جا سکتا ہے لیکن یہ اچھی طرح ذہن نشین کر لینا چاہیئے کہ کسی واقعہ کا احتمال دو یا زیادہ واقعات کے احتمالوں کے حاصل جمع کے مساوی اسی صورت میں سمجھا جا سکتا ہے جبکہ واقعات بلحاظ ایک دوسرے کے بالکل غیر متعلق ہوں یعنی جب کسی ایک کا واقع ہونا یا نہ ہونا باقی واقعات میں سے کسی ایک کے وقوع پذیر ہونے پر اثر انداز نہ ہو۔

مثال۔ ۲۰ ٹکٹوں پر پہلے بیس طبعی عدد لکھے ہوئے ہیں، ان میں سے ایک ٹکٹ علی الحساب نکالا گیا ہے، بتاؤ کہ اس پر لکھے عدد کا ۳ یا ۷ کے ضعف ہونے کا کیا احتمال ہے۔

اسِ ٹکٹ پر کے عدد کے ۳ کے ضعف ہونے کا احتمال $\frac{۶}{۲۰}$ ہے یا $\frac{۳}{۱۰}$ ہے
اور ۷ کے ضعف ہونے کا احتمال $\frac{۲}{۲۰}$ یعنی $\frac{۱}{۱۰}$ ہے، اور یہ واقعات
باہم منافی ہیں۔ پس مطلوبہ احتمال

$$\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۱۰} = \frac{۲}{۵} \text{ ہے۔}$$

لیکن اگر سوال یوں ہوتا کہ اسِ عدد کے ۳ کے یا ۵ کے ضعف ہونے کا کیا احتمال ہے تو حسب ذیل طریق پر استدلال کرنا غلط ہوتا۔

چونکہ عدد مذکور کے ۳ کے ضعف ہونے کا احتمال $\frac{۶}{۲۰}$ ہے اور عدد مذکور کے ۵ کے کوئی ضعف ہونے کا احتمال $\frac{۴}{۲۰}$ ہے، اسلئے

$$\text{مطلوبہ احتمال } \frac{۶}{۲۰} + \frac{۴}{۲۰} = \frac{۱}{۲} \text{ ہے۔}$$

اس کی وجہ یہ ہے کہ ممکن ہے کہ عدد مذکور ۳ اور ۵ دونوں کا ضعف ہو، اسِ لئے اسِ صورت میں دونوں واقعات ایک دوسرے سے غیر متعلق یا منافی نہیں ہیں۔

۱۶۴ ۔ یہ بات قابل غور ہے کہ مفرد اور مرکب واقعات کا فرق بہت سی صورتوں میں محض مصنوعی ہوتا ہے۔ بعض صورتوں میں یہ صرف نقطہ نظر کا فرق ہوتا ہے۔

مثال ۔ ایک تھیلی میں ۵ سفید اور ۷ سیاہ گیند ہیں، اگر دو گیند نکالے جائیں تو ایک گیند کے سیاہ اور دوسرے کے سفید ہونے کا کیا احتمال ہے۔

(۱) اگر اسِ واقعہ کو مفرد تصور کیا جائے تو

$$\text{احتمال مطلوبہ} = (۵ \times ۷) \div {}^{۱۲}ج_{۲} = \frac{۳۵}{۶۶}$$

(۲) اسِ واقعہ کو ذیل کے دو مرکب واقعات میں سے ایک یا دوسرے

کا وقوع تصور کیا جا سکتا ہے۔
۱۔ پہلے ایک سفید اور پھر ایک سیاہ گیند کا نکالنا، اس کا احتمال

$$\frac{۵}{۱۲} \times \frac{۷}{۱۱} \text{ یعنی } \frac{۳۵}{۱۳۲} \text{ ہے}$$

۲۔ پہلے سیاہ اور پھر سفید گیند کا نکالنا، اس کا احتمال

$$\frac{۷}{۱۲} \times \frac{۵}{۱۱} = \frac{۳۵}{۱۳۲} \text{ ہے}$$

اور چونکہ یہ واقعات ایک دوسرے سے بالکل غیر متعلق ہیں، اسلئے مطلوبہ احتمال

$$= \frac{۳۵}{۱۳۲} + \frac{۳۵}{۱۳۲} = \frac{۳۵}{۶۶} \text{ ہے}$$

یہ بات قابل غور ہے کہ ہم نے یہاں تسلیم کرلیا ہے کہ دو مخصوص گیندوں کو یکے بعد دیگرے نکالنے کا احتمال وہی ہے جو اُن کو ایک ساتھ نکالنے کا ہے، ذرا سے غور سے معلوم ہو جائیگا کہ یہ دُرست ہے۔

امثلہ نمبری ۳۲ (ب)

۱۔ ایک معمولی مہرہ کو یکے بعد دیگرے دو مرتبہ پھینکنے سے صرف پہلی افتاد میں یکہ کے نکلنے کا کیا احتمال ہے۔

۲۔ ایک تاش میں سے تین پتے علی الحساب نکالے گئے ہیں، بتاؤ کہ ان پتوں کے بادشاہ، بیگم اور غلام ہونے کا کیا احتمال ہے۔

۳۔ ایک واقعہ کے خلاف امکان ۵ : ۲ ہے اور ایک اور واقعہ جو پہلے واقعہ پہ منحصر نہیں ہے اس کے موافق امکان ۶ : ۵ ہے، ان واقعات میں سے کم از کم ایک کے واقع ہونے کا کیا احتمال ہے۔

۴۔ ایک لڑکے ا کے ایک سوال کو حل کر سکنے کے خلاف

امکان ۴ : ۳ ہے اور ایک لڑکے ب کے یہی سوال حل کر سکنے کے موافق امکان ۷ : ۵ ہے اگر یہ دونوں حل کرنے کی کوشش کریں تو سوال کے حل ہو جانے کا کیا احتمال ہے۔

۵۔ ایک بٹوے کے ایک خانہ میں ۲ پونڈ اور ۳ شلنگ ہیں اور دوسرے خانہ میں ۲ پونڈ اور ایک شلنگ، بٹوے میں سے ایک پونڈ نکالنے کا کیا احتمال ہے۔

۶۔ ایک تھیلی میں ۱۷ ٹکٹ ہیں جن پر ایک سے سترہ تک عدد لکھے ہوئے ہیں۔ ان میں سے ایک ٹکٹ نکالا گیا ہے اور پھر اس کو واپس رکھ دیا گیا ہے، پھر ایک اور ٹکٹ نکالا گیا ہے اس کا کیا احتمال ہے کہ پہلا عدد "جفت" اور دوسرا طاق ہو۔

۷۔ ۴ آدمی ایک تاش میں سے ایک ایک پتہ نکالتے ہیں بتاؤ کہ (۱) چاروں پتوں کے مختلف رنگوں کے ہونے کا اور (۲) کسی دو پتوں کی ایک ہی قیمت کے نہ ہونے کا کیا احتمال ہے۔

۸۔ ایک مہرہ کو ۵ دفعہ پھینکنے میں کم از کم ایک دفعہ '۶' نکلنے کا کیا احتمال ہے۔

۹۔ ایک کتاب کا تین نکتہ سنج جدا جدا تبصرہ کر رہے ہیں، ان کے تبصروں کے کتاب کے حق میں یا موافق ہونے کے احتمال بالترتیب ۵ : ۲، ۴ : ۳، ۳ : ۴ ہیں۔ اس کا کیا احتمال ہے کہ تین تبصروں میں سے کثرت کتاب کے حق میں ہو۔

۱۰۔ ایک تھیلی میں ۵ سفید اور ۳ سیاہ گیند ہیں، ان میں سے ۴ کو یکے بعد دیگرے اسطرح نکالا گیا ہے کہ نکالا ہوا گیند واپس نہیں رکھا گیا۔ بتاؤ کہ ان گیندوں کے متبادلاً مختلف رنگوں کے ہونے کا کیا احتمال ہے۔

۱۱۔ دو مہروں کو تین بار پھینکا گیا ہے، بتاؤ کہ کم از کم ایک بار 'دستر' نکلنے کا کیا احتمال ہے [جب دو رخوں کے عددوں کی قیمتیں

مساوی ہوں تو ان عددوں کے زوج کو دُسّر کہتے ہیں]

۱۲۔ اگر علی الحساب چار صحیح عددوں کو لیکر ضرب دیا جائے تو ثابت کرو کہ حاصل ضرب کے آخری ہندسہ کے ۱، ۳، ۷ یا ۹ ہونیکا احتمال $\frac{16}{625}$ ہے۔

۱۳۔ ایک بٹوے میں ۱۰ سکے ہیں جن میں سے ایک سکہ پونڈ ہے اور باقی سب شلنگ ہیں، دوسرے بٹوے میں ۱۰ سکے ہیں اور سب کے سب شلنگ ہیں۔ پہلے بٹوے میں سے ۹ سکے لیکر دوسرے میں ڈال دئے گئے ہیں، پھر دوسرے میں سے ۹ سکے لیکر پہلے میں ڈالے گئے ہیں، بتاؤ کہ پونڈ کے ابھی تک پہلے ہی بٹوے میں ہونے کا کیا احتمال ہے۔

۱۴۔ ۲ سکوں کو پانچ مرتبہ اچھالا گیا ہے، بتاؤ کہ ۵ تصویروں اور ۵ زنجیروں کے نکلنے کا کیا احتمال ہے

۱۵۔ ہ سکوں کو اچھالا گیا ہے، بتاؤ کہ ایک اور صرف ایک ہی سکہ میں تصویر کے اوپر ہونے کا کیا احتمال ہے۔

۱۶۔ ا، ب اور ج ترتیب وار پتوں کی ایک تاش کو کاٹتے ہیں اور پتّوں کو پھر واپس رکھہ دیتے ہیں۔ شرط یہ ہے کہ جو شخص پہلے تاش کے حکم کا پتہ کاٹے گا وہ انعام کا مستحق ہوگا، اِن میں سے ہر ایک کے جداگانہ انعام پانے کا کیا احتمال ہے؟

۱۷۔ ایک بٹوے میں ۳ پونڈ اور ۴ شلنگ ہیں، ا اور ب ترتیب وار اس میں سے جداگانہ ایک ایک سکہ نکالتے ہیں اور پھر واپس نہیں رکھتے، اِن میں سے جداگانہ ہر ایک کا پہلے ایک پونڈ نکالنے کا کیا احتمال ہے۔

۱۸۔ ن اشخاص کی ایک جماعت ایک گول میز کے گرد بیٹھی ہے دو مخصوص آدمیوں کے ایک دوسرے کے پاس بیٹھنے کے خلاف کیا امکان ہے۔

۱۹- چھ گھوڑے ایک دوڑ میں حصہ لیتے ہیں، ان میں سے ایک ا ہے۔ ا پر چابک سواروں ب اور ج میں سے کوئی ایک سوار ہوگا۔ ب کا ا پر سوار ہونے کے موافق امکان ۲ : ۱ ہے، اس صورت میں سب گھوڑوں کے جیتنے کا امکان مساوی ہے اگر ج ا پر سوار ہو تو ا کے جیتنے کا احتمال تین گنا ہو جاتا ہے، ا کے جیتنے کے خلاف کیا امکان ہے؟

۲۰- اگر ۱۰ جہازوں میں سے بالاوسط ایک جہاز غرق ہو جاتا ہو تو ۵ جہازوں میں سے کم از کم ۴ کے صحیح سلامت پہنچنے کا کیا احتمال ہے۔

۴۶۲- اگر ایک واقعہ کے واقع ہونے کا احتمال ایک امتحان میں معلوم ہو تو ن امتحانوں میں اس کے ٹھیک ایک دفعہ، دو دفعہ، تین دفعہ ..... واقع ہونے کا احتمال جداگانہ دریافت کرو۔

فرض کرو کہ ایک امتحان میں واقعہ کے وقوع پذیر ہونے کا احتمال ق ہے۔ نیز فرض کرو کہ ۱ - ق = ف، تب ن امتحانوں میں واقعۂ مذکور کے عین ل مرتبہ وقوع پذیر ہونے کا احتمال $(\text{ف} + \text{ق})^{\text{ن}}$ کے پھیلاؤ میں (ل+۱) ویں رقم کے مساوی ہوگا۔

کیونکہ اگر ہم کل امتحانوں میں سے ل امتحانوں کا کوئی خاص جٹ منتخب کرلیں تو اس کا احتمال کہ واقعۂ مذکور ان ل امتحانوں میں سے ہر ایک میں واقع ہو اور باقی امتحانوں میں سے کسی میں واقع نہ ہو $\text{ق}^{\text{ل}}\,\text{ف}^{\text{ن}-\text{ل}}$ ہے (دیکھو دفعہ ۴۵۶) اور چونکہ ل امتحانوں کا کوئی جٹ $\text{ن}\text{ج}_{\text{ل}}$ طریقوں سے منتخب کیا جا سکتا ہے اور ان میں سے ہر طریقہ میں واقعہ کے وقوع پذیر ہونے کا

احتمال $ق^ر ف^{ن-ر}$ ہے اِس لئے مطلوبہ احتمال

$$ن_{ج_ر} ق^ر ف^{ن-ر}$$

ہے۔

اگر ہم $(ق+ف)^ن$ کو مسئلہ ثنائی کی رُو سے پھیلائیں تو ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$(ق+ف)^ن = ق^ن + ن_{ج_۱} ق^{ن-۱} ف + ن_{ج_۲} ق^{ن-۲} ف^۲ + \dots + ن_{ج_ر} ق^ر ف^{ن-ر} + \dots + ف^ن$$

گویا سلسلۂ بالا کی رقمیں ن امتحانوں میں واقعہ کے بالترتیب ن بار، (ن-۱) بار، (ن-۲) بار ...... واقع ہونے کے احتمال کو تعبیر کرتی ہیں۔

۳۶۴۔ اگر ایک واقعہ پورے ن مرتبہ واقع ہو سکتا ہو یا صرف ایک مرتبہ، دو مرتبہ ..... (ن-ر) مرتبہ واقع نہ ہو سکتا ہو تو ظاہر ہے کہ یہ ر یا ر سے زیادہ مرتبہ واقع ہو سکتا ہے اس لئے ن امتحانوں میں اس کے کم از کم ر مرتبہ واقع ہونے کا احتمال

$$ق^ن + ن_{ج_۱} ق^{ن-۱} ف + ن_{ج_۲} ق^{ن-۲} ف^۲ + \dots + ن_{ج_ر} ق^ر ف^{ن-ر}$$

یعنی $(ق+ف)^ن$ کی تفصیل میں پہلی ن-ر+۱ رقموں کے حاصل جمع سے تعبیر ہوتا ہے۔

مثال ۱۔ دو مہروں کو ایک ساتھ چار مرتبہ پھینکا گیا ہے۔ کم از کم دو "دُسروں" کے نکلنے کا کیا احتمال ہے۔

ایک دفعہ پھینکنے میں دُسّر نکلنے کا احتمال $\frac{۶}{۳۶}$ یعنی $\frac{۱}{۶}$ ہے۔ اور دُسّر نہ نکلنے کا احتمال $\frac{۵}{۶}$ ہے۔ واقعہ زیر بحث کے پورا ہونے کے لئے

دُسّیرں دو مرتبہ، تین مرتبہ، یا چار مرتبہ نکل سکتی ہیں کیونکہ مہروں کو چار مرتبہ پھینکا گیا ہے۔ پس مطلوبہ احتمال $\left(\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\right)^4$ کی تفصیل میں پہلی تین رقموں کے حاصل جمع کے مساوی ہے۔ یعنی

$$= \frac{1}{6^4}\left(1+4\times5+6\times5^2\right)=\frac{19}{144}$$

مثال ۲۔ ایک تھیلی میں کچھ گیند ہیں جن میں سے کچھ گیند سفید ہیں، ایک گیند کو نکال کر پھر واپس رکھ دیا گیا ہے۔ پھر ایک اور کو نکال کر واپس رکھ دیا گیا ہے اور علیٰ ہذا القیاس۔ اگر ایک امتحان میں سفید گیند کے نکلنے کا احتمال ق ہو تو بتاؤ کہ ن امتحانوں میں زیادہ سے زیادہ کتنے سفید گیندوں کے نکلنے کا احتمال ہے؟

ٹھیک ر سفید گیند نکلنے کا احتمال $^{ن}ج_{ر}\,ق^{ر}\,ف^{ن-ر}$ ہے، اب ہمیں صرف یہ معلوم کرنا ہے کہ ن کی کس قیمت کے یہ جملہ بڑے سے بڑا ہے۔

$$\text{اب}\quad ^{ن}ج_{ر}\,ق^{ر}\,ف^{ن-ر} > {}^{ن}ج_{ر-1}\,ق^{ر-1}\,ف^{ن-(ر-1)}$$

$$\text{تاوقتیکہ}\quad (ن-ر+1)\,ق > ر\,ف$$

$$\text{یعنی}\quad (ن+1)\,ق > (ق+ف)\,ر$$

لیکن ق + ف = ۱، پس ر کی مطلوبہ قیمت ق (ن+۱) میں کے بڑے سے بڑے عدد کے مساوی ہے۔

اگر ن ایسا ہو کہ ق ن کوئی صحیح عدد ہو تو غالب ترین صورت یہ ہے کہ ق ن کامیابیاں اور ف ن ناکامیاں ہونگی۔

۴۶۴۔ فرض کرو کہ ایک قرعہ میں ن ٹکٹ ہیں اور انعام لا پونڈ ہے، اب چونکہ انعام حاصل کرنے کے لئے سب ٹکٹوں کا امکان مساوی ہے اور ایک شخص جس کے پاس سب ٹکٹ

ہوں وہ ضرور جیتیگا اس لئے سمجھنا چاہئے کہ ہر ایک ٹکٹ
کی مالیت $\frac{لا}{ن}$ پونڈ ہے، دوسرے لفظوں میں ایک ٹکٹ
کے عوض میں یہ رقم معقولیت کے ساتھ ادا کیجا سکتی ہے۔ پس
اگر ایک آدمی کے پاس ر ٹکٹ ہوں اور وہ اِن کو بیچنا چاہے
تو اِن کے عوض میں اسکا $\frac{ر لا}{ن}$ پونڈ طلب کرنا معقولیت
سے بعید نہیں، گویا اسکی کامیابی کے احتمال کی قیمت $\frac{ر}{ن}$ لا
پونڈ متصور ہو سکتی ہے۔ اِس بنا پر ذیل کی تعریف وضع
کرنا موجب سہولت ہوگا۔

اگر ایک شخص کی کامیابی کا احتمال ق ہو اور م وہ رقم
ہو جو اس کو بصورت کامیابی حاصل ہو سکتی ہو تو م ق
سے جو رقم تعبیر ہوگی وہ اس شخص کی 'توقع' کہلاتی ہے۔

۴۶۵۔ جس طرح سے بلحاظ کسی شخص کے لفظ "توقع" کا استعمال
سہولت بخش ہے اسی طرح بلحاظ اشیاء کے الفاظ 'ظنی قیمت' کا استعمال موجب آسانی ہے۔

مثال ۱۔ ایک بٹوے میں ایک پونڈ اور ۵ شلنگ ہیں۔ ایک
اور بٹوے میں ۶ شلنگ ہیں، پہلے بٹوے میں سے دو سکے نکال کر
دوسرے بٹوے میں ڈالے گئے ہیں، پھر دوسرے میں سے دو سکے
نکال کر پہلے میں ڈالے گئے ہیں، ہر ایک بٹوے کے سکوں کی 'ظنی
قیمت'، معلوم کرو۔

پونڈ کے پہلے بٹوے میں ہونے کا احتمال اسکے دوبارہ بدلے جانے
اور ایک بار بھی نہ بدلے جانے کے احتمالوں کے حاصل جمع کے مساوی ہے

یعنی پہلے بٹوے میں ہونیکا احتمال $= \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۴} + \frac{۲}{۳} \times ۱ = \frac{۳}{۴}$

لہذا پونڈ کے دوسرے بٹوے میں ہونے کا احتمال = $\frac{1}{4}$

پس پہلے بٹوے کی ظنی قیمت $\frac{3}{4} \times 25$ شلنگ + $\frac{1}{4} \times 6$ شلنگ

= ۱ پونڈ ۰ شلنگ ۳ پنس

∴ دوسرے بٹوے کی ظنی قیمت = ۳۱ شلنگ - $20\frac{1}{4}$ شلنگ

= ۱۰ شلنگ ۹ پنس

اس مسئلہ کو اس طرح بھی حل کیا جاسکتا ہے۔

جن سکوں کو نکالا گیا ہے ان کی ظنی قیمت = ۲۵ شلنگ کا $\frac{1}{3}$

= $8\frac{1}{3}$ شلنگ، جن کو پھر واپس لایا گیا ہے ان کی ظنی قیمت

= (۶ شلنگ + $8\frac{1}{3}$ شلنگ) کا $\frac{1}{4}$ = $3\frac{7}{12}$ شلنگ

∴ پہلے بٹوے کی ظنی قیمت = $(25 - 8\frac{1}{3} + 3\frac{7}{12})$ شلنگ

= ۱ پونڈ ۰ شلنگ ۳ پنس حسب سابق

مثال ۲۔ ا اور ب ۱۱ پونڈ کا ایک انعام جیتنے کے لئے اس شرط پر یکے بعد دیگرے ایک مہرہ پھینکتے ہیں کہ جو پہلے ۶ پھینکیگا وہ انعام کا مستحق ہوگا۔ اگر ا پہلے پھینکے تو ان کی جداگانہ کیا "توقعات" ہیں۔

پہلی افتاد میں ا کا احتمال $\frac{1}{6}$ ہے اور دوسری افتاد میں $\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6}$ ہے، کیونکہ ا کو دوسری مرتبہ پھینکنے کا موقع صرف اسی صورت میں مل سکتا ہے جبکہ دونوں کھلاڑی پہلی مرتبہ ناکام رہ چکیں تیسری مرتبہ پھینکنے میں ا کا احتمال $(\frac{5}{6})^4 \times \frac{1}{6}$ ہے، کیونکہ ا کو تیسرا موقع صرف اسی صورت میں مل سکتا ہے جبکہ ا اور ب دونوں دو دو مرتبہ ناکام رہ چکیں علیٰ ہذا القیاس

پس ا کا احتمال لامتناہی سلسلہ

$$\frac{۱}{۶}\left\{۱+\left(\frac{۵}{۶}\right)^{۲}+\left(\frac{۵}{۶}\right)^{۴}+\cdots\cdots\right\}$$

کے مجموعہ کے مساوی ہے۔

اسی طرح سے ب کا احتمال لامتناہی سلسلہ

$$\frac{۵}{۶}\times\frac{۱}{۶}\left\{۱+\left(\frac{۵}{۶}\right)^{۲}+\left(\frac{۵}{۶}\right)^{۴}+\cdots\cdots\right\}$$

کے مجموعہ کے مساوی ہے۔

∴ ا کے احتمال کی نسبت ب کے احتمال کے ساتھ ۶ : ۵ ہے، اس لئے جداگانہ اُن کے احتمال بالترتیب $\frac{۶}{۱۱}$ اور $\frac{۵}{۱۱}$ ہیں اور ان کی توقعات ۶ پونڈ اور ۵ پونڈ ہیں۔

۴۶۶ - اب ہم دو اور مثالیں حل کرتے ہیں جن سے نہایت مفید اور دلچسپ نتائج مستنبط ہوتے ہیں۔

مثال ۱ - ایک بازی جیتنے کے لئے دو کھلاڑیوں ا اور ب کو بالترتیب م اور ن کھیل جیتنے کی ضرورت ہوتی ہے۔ ایک کھیل جیتنے کے لئے اُن کے احتمال بالترتیب ق اور قَ ہیں جہاں ق اور قَ کا مجموعہ ایک ہے انعام اُس کو ملیگا جو پہلے اپنے کھیلوں کی تعداد کو پورا کرے گا۔ بتاؤ کہ ہر ایک کھلاڑی کے جیتنے کا کیا احتمال ہے؟

فرض کرو کہ ا ٹھیک م + ن کھیلوں میں بازی جیت لیتا ہے ایسا ہونے کے لئے لازماً وہ آخری کھیل میں جیتا ہوگا اور اس سے پہلے کے م + ن - ۱ کھیلوں میں سے م - ۱ کھیلوں میں جیتا ہوگا۔ اس کا احتمال

$$_{م+ن-۱}ج_{م-۱}\ ق^{م-۱}\ قَ^{ن}\ ق$$

یعنی $_{م+ن-۱}ج_{م-۱}\ ق^{م}\ قَ^{ن}$ ہے۔

اب ضروری ہے کہ بازی کا فیصلہ م + ن - ۱ کھیلوں سے ہو اور ا اپنے م کھیل ٹھیک م کھیلوں میں سے یا م + ۱ کھیلوں میں سے یا..... م + ن - ۱ کھیلوں میں سے جیت سکتا ہے۔ اس لئے اگر ہم جملہ $\text{ج}^{\text{م}+\text{ن}-1}_{\text{م}-1}\ \text{ق}^{\text{م}}\ \bar{\text{ق}}^{\text{ر}}$ میں بالترتیب ر کو ۱، ۲، ۳، .... ن - ۱ قیمتیں دیکر محصلہ جملوں کی قیمتیں معلوم کرلیں تو ہمیں ا کے جیتنے کا احتمال معلوم ہو جائے گا۔

پس ا کے جیتنے کا احتمال

$$\text{ق}^{\text{م}}\left\{1+\text{م}\,\bar{\text{ق}}+\frac{\text{م}(\text{م}+1)}{2!}\bar{\text{ق}}^{2}+\dots+\frac{(\text{م}+\text{ن}-2)!}{(\text{م}-1)!\,(\text{ن}-1)!}\bar{\text{ق}}^{\text{ن}-1}\right\}$$ ہے

اسی طرح ب کے جیتنے کا احتمال

$$\bar{\text{ق}}^{\text{ن}}\left\{1+\text{ن}\,\text{ق}+\frac{\text{ن}(\text{ن}+1)}{2!}\text{ق}^{2}+\dots+\frac{(\text{م}+\text{ن}-2)!}{(\text{م}-1)!\,(\text{ن}-1)!}\text{ق}^{\text{م}-1}\right\}$$ ہے

اس مسئلہ کو "بازیوں کا مسئلہ" کہتے ہیں اور حکیم پاسکل کے زمانہ سے لیکر بعد کے اکثر مشہور و معروف ریاضی دانوں کی توجہ اس مسئلہ کی طرف مبذول رہی ہے، ۱۶۵۴ء میں پہلے پہلے یہ سوال شی ولیرڈی میئری کی جانب سے حکیم پاسکل کے سامنے پیش کیا گیا اور پاسکل اور فرما نے اس پر بحث کی لیکن انہوں نے اپنی توجہ کو دونوں کھلاڑیوں کے بلحاظ مہارت مساوی ہونے کی صورت تک محدود رکھا۔ ان دونوں کے نتائج اوپر کے نتائج سے ذرا مختلف شکل میں تھے۔ جو نتائج ہم نے اوپر درج کئے ہیں وہ مانٹ مارٹ کے ساتھ منسوب کئے جاتے ہیں جس نے پہلے پہل ان کو اپنی ایک کتاب میں ۱۷۱۴ میں شائع کیا۔ یہی نتیجہ بعد ازاں لاگرینج اور لاپلاس نے

مختلف طریقوں سے حاصل کیا۔ موخر الذکر نے اس مسئلہ کی بہت سی مختلف صورتوں
پر بالتفصیل بحث کی ہے۔

مثال ۲۔ ن مہروں میں سے ہر ایک مہرہ کے ر رخ ہیں اور ہر
مہرے کے رخوں پر بالترتیب ۱ سے ر تک عدد منقوش ہیں، اگر ان سب کو
علی الحساب پھینکا جائے تو بتاؤ کہ جو عدد سب مہروں پر نکلیں ان کے مجموعہ
کے ق کے مساوی ہونے کا کیا احتمال ہے۔

چونکہ ن مہروں میں سے ہر ایک مہرہ کے ر رخوں میں سے کوئی رخ اوپر
آسکتا ہے اس لئے مہروں کے گرنے کے طریقوں کی تعداد $\text{ر}^{\text{ن}}$ ہے۔

نیز جن طریقوں سے ظاہر شدہ عددوں کا مجموعہ ق ہو سکتا ہے ان
کی تعداد

$$(\text{لا}^{۱} + \text{لا}^{۲} + \text{لا}^{۳} + \ldots\ldots + \text{لا}^{\text{ر}})^{\text{ن}}$$

کی تفصیل میں $\text{لا}^{\text{ق}}$ کے سر کے مساوی ہے اس کی وجہ یہ ہے کہ ہمیں
قوت نماؤں ۱، ۲، ۳، ..... ر میں سے ن ایسے قوت نماؤں کو لینا
ہے جن کا مجموعہ ق ہو اور ایسا کرنے کے مختلف طریقوں کی تعداد
صریحاً $\text{لا}^{\text{ق}}$ کے سر کے مساوی ہے۔

اب جملۂ بالا $= \text{لا}^{\text{ن}} (۱ + \text{لا} + \text{لا}^{۲} + \ldots\ldots + \text{لا}^{\text{ر}-۱})^{\text{ن}}$

$$= \text{لا}^{\text{ن}} \left(\frac{۱ - \text{لا}^{\text{ر}}}{۱ - \text{لا}}\right)^{\text{ن}}$$

اس لئے اب ہمیں صرف $(۱ - \text{لا}^{\text{ر}})^{\text{ن}} (۱ - \text{لا})^{-\text{ن}}$ کی تفصیل میں $\text{لا}^{\text{ق}-\text{ن}}$
کا سر معلوم کرنا ہے۔

$$(۱ - \text{لا}^{\text{ر}})^{\text{ن}} = ۱ - \text{ن}\,\text{لا}^{\text{ر}} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{\lfloor ۲} \text{لا}^{۲\text{ر}} - \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)(\text{ن}-۲)}{\lfloor ۳} \text{لا}^{۳\text{ر}} + \ldots$$

$$(1-لا)^{-ن} = 1 + ن\,لا + \frac{ن(ن+1)}{\lfloor 2}لا^{2} + \frac{ن(ن+1)(ن+2)}{\lfloor 3}لا^{3} + \ldots$$

اِن سلسلوں کو باہم ضرب دو اور حاصل ضرب میں $لا^{ق-ن}$ کا سر محسوب کرو، اِس طرح سے یہ سر

$$\frac{ن(ن+1)\ldots(ق-1)}{\lfloor ق-ن} - ن\,\frac{ن(ن+1)\ldots(ق-ر-1)}{\lfloor ق-ن-ر}$$

$$+ \frac{ن(ن-1)}{1\times 2} \times \frac{ن(ن+1)\ldots(ق-2ر-1)}{\lfloor ق-ن-2ر} \ldots\ldots\ldots$$

حاصل ہوتا ہے جہاں یہ سلسلہ اِس وقت تک جاری رکھنا چاہئے جبتک کہ کوئی منفی جزو ضربی رونما نہ ہو جائے۔ مطلوبہ احتمال مندرجہ بالا سلسلہ کو $ر^{ن}$ پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

اس مسئلہ کو ڈی ماٹیرے کے ساتھ منسوب کیا جاتا ہے، اِس نے اس مسئلہ کو ۱۷۳۰ میں طبع کیا، یہ ایک نہایت کثیر الاستعمال طریقہ کی مثال ہے۔

لاپلاس نے بعد ازیں یہی ضابطہ زیادہ پُر مشقت طریقہ سے دریافت کیا اور اِس نے اِس ابتدائی وجہ موجبہ پر بحث کرتے ہوئے جس سے تمام سیّارے ناقص مداروں پر گھومنے شروع ہوئے اور اسی سمت میں گھومنے شروع ہوئے جس میں زمین سورج کے گرد گھوم رہی ہے اِس ضابطہ کو استعمال بھی کیا۔ اس کے متعلق طالب علم اگر چاہے تو ٹاڈہنٹر کی ہسٹری آف پرابےبلی ٹی (تاریخ احتمال) دفعہ ۹۸۷ کا مطالعہ کرسکتا ہے۔

امثلہ نمبری ۳۲ (ج)

۱۔ ایک کھیل میں ا کی مہارت اور ب کی مہارت کی باہمی نسبت

۳ : ۲ ہے۔ بتاؤ کہ ۵ بازیوں میں سے کم از کم ۳ جیتنے کے لئے ا کا کیا احتمال ہے۔

۲- ایک سکہ کے رخوں پر بالترتیب ۲ اور ۳ لکھے ہوئے ہیں، سکہ کو پانچ مرتبہ اچھالا گیا ہے، بتاؤ کہ جو عدد نکلیں اُن کے مجموعہ کے ۱۲ ہونے کا کیا احتمال ہے۔

۳- کئی کھیلوں کی بازی میں ہر ایک کھیل کے اندر گذشتہ کھیل کے جیتنے والے کے موافق امکان ۲ : ۱ ہے، بتاؤ کہ اس کھلاڑی کے لئے جو پہلی بازی جیتتا ہے بعد کی چار بازیوں میں سے کم از کم تین جیتنے کا کیا احتمال ہے۔

۴- ایک تھیلی میں ۹ سکے ہیں، اُن میں سے ۵ پونڈ ہیں اور باقی مساوی مالیت کے نامعلوم سکے ہیں۔ اگر ایک دفعہ سکے نکالنے کی تخمینی قیمت ۱۲ شلنگ ہو تو بتاؤ کہ وہ سکے کیا ہیں۔

۵- ایک سکہ کو ن بار اچھالا گیا ہے، بتاؤ کہ تصویر کے طاق بار نکلنے کا کیا احتمال ہے۔

۶- ایک شخص ایک تھیلی میں، سے جس میں ۲ پونڈ اور ۳ شلنگ ہیں بن دیکھے دو سکے نکالنے کا مجاز ہے، اس کی توقع کی قیمت دریافت کرو۔

۷- چھ اشخاص یکے بعد دیگرے ایک پیسہ اچھالتے ہیں، انعام اُس کو ملیگا جس کے پھینکنے سے پہلے تصویر نکلے۔ چوتھے شخص کا احتمال معلوم کرو۔

۸- ایک تھیلی میں تین پتیاں ہیں جن پہ بالترتیب اعداد ۱، ۲، ۳ لکھے ہیں، اِن میں سے ایک کو نکال کر پھر واپس رکھ دیا گیا ہے، اسی عمل کو تین بار کیا گیا ہے مجموعہ کے ۶ ہونے کا کیا احتمال ہے۔

۹- ایک سکہ کے دو رخوں پر ہندسے ۳ اور ۵ لکھے گئے ہیں سکہ کو چار مرتبہ اچھالا گیا ہے۔ اس طرح اچھالنے سے جو عدد برآمد ہوں اِن کے حاصل جمع کے ۱۵ سے کم ہونے کے خلاف کیا امکان ہے۔

۱۰- تین مہروں کو ایک ساتھ پھینکنے سے ٹھیک ۱۰ نکلنے کا کیا احتمال ہے۔

۱۱۔ دو مساوی مہارت کے کھلاڑی ا اور ب کھیلوں کی ایک بازی میں شریک ہوئے۔ جب ا کے جیتنے میں ۳ کھیلوں کی اور ب کے جیتنے میں دو کھیلوں کی کمی رہ جائے تو وہ کھیلنا چھوڑ دیتے ہیں اگر انعام ۱۶ پونڈ ہو تو بتاؤ کہ اوسمیں دونوں کا کیا حصہ ہے۔

۱۲۔ ا اور ب تین مہروں سے کھیلتے ہیں، ا کے مہرے پھینکنے سے ۸ برآمد ہوتا ہے بتاؤ کہ ب کا اس سے زیادہ پھینکنے کا کیا احتمال ہے؟

۱۳۔ ا کی جیب میں ایک پونڈ اور ۴ شلنگ ہیں، وہ ان میں سے دو سکوں کو علی الحساب نکال کر ب اور ج کو دے دینا چاہتا ہے، ج کی توقع کی قیمت دریافت کرو۔

۱۴۔ ایک ہی مہرہ کو ۵ مرتبہ پھینکنے سے (۱) ٹھیک ۳ یکے (۲) کم از کم تین یکے نکلنے کا کیا احتمال ہے۔

۱۵۔ ا، ب کے ساتھ ۵ شلنگ : ۲ شلنگ کی یہ شرط باندھتا ہے کہ دو مہروں کو ایک ساتھ پھینکنے سے وہ ب کے ۴ پھینکنے سے پہلے ۷ پھینک سکے گا دونوں کے پاس دو، دو مہرے ہیں اور وہ دونوں ایک ساتھ پھینکتے ہیں حتی کہ ان میں سے ایک جیت جاتا ہے اور ان افتادوں کو جن میں مساوی اعداد برآمد ہوتے ہیں نظر انداز کیا جاتا ہے۔ ب کی توقع معلوم کرو۔

۱۶۔ دو مہروں میں سے ایک مہرہ معمولی مکعب ہے اور دوسرا منتظم چہار سطحی مجسم۔ ایک شخص ان مہروں کو پھینکتا ہے بتاؤ کہ جو عدد اس طرح برآمد ہوں ان کے حاصل جمع کے ۵ سے کم نہ ہونے کا کیا احتمال ہے۔ چہار سطحی کی صورت میں سب سے نچلے رخ پر کا عدد شمار میں آتا ہے۔

۱۷۔ ایک تھیلی میں ھ مالیت کا ایک سکہ ہے اور چند اور سکے ہیں جنکی مجموعی قیمت ھ ہے۔ ایک آدمی ایک ایک کرکے سکے نکالتا ہے حتی کہ وہ ھ نکال لیتا ہے، اس کی توقع کی قیمت دریافت کرو۔

۱۵- ایک تھیلی میں ۶ ن ٹکٹ ہیں، جن پر اعداد ۰، ۱، ۲، ۳، ..... ۶ ن - ۱ لکھے ہوئے ہیں اِن میں سے تین ٹکٹ نکالے گئے ہیں، ثابت کرو کہ اِن کے مجموعہ کا ۶ ن کے مساوی ہونے کا احتمال یہ ہے

$$\frac{۳ ن}{(۶ ن - ۱)(۶ ن - ۲)}$$

مقلوب احتمال

۴۶۷- جن صورتوں پر اب تک ہم نے غور کیا ہے اِن میں ہم نے یہ فرض کر لیا ہے کہ وہ اسباب جو کسی واقعہ کا موجب ہوتے ہیں اُن کے متعلق ہمارے معلومات اِس قسم کے ہیں کہ ہم اُن سے واقعہ مذکور کے واقع ہونے کا احتمال معلوم کر سکتے ہیں۔ اب ہم اِس سے مختلف نوعیت کے مسائل پر بحث کریں گے۔ مثلاً اگر ہمیں یہ معلوم ہو کہ کوئی خاص واقعہ کئی اسباب میں سے کسی ایک سبب کی وجہ سے پیدا ہوا ہے تو ہم یہ معلوم کرینگے کہ اِن سب اسباب میں سے ہر ایک سبب کے واقعہ مذکور پر متنتج ہونے کا کیا احتمال ہے۔ نیز انہی اسباب کے زیر عمل مزید واقعات کے وقوع پذیر ہونے کا احتمال دریافت کرینگے۔

۴۶۸- عام ترین صورت پر بحث کرنے سے پہلے ہم ایک عددی مثال حل کرینگے۔

فرض کرو کہ ہمارے پاس دو بٹوے ہیں۔ ایک میں ۵ پونڈ اور ۳ شلنگ ہیں۔ دوسرے میں ۳ پونڈ اور ایک شلنگ ہے۔ نیز فرض کرو کہ ایک پونڈ علی الحساب نکالا گیا ہے، اِس پونڈ کے پہلے بٹوے میں سے اور دوسرے بٹوے میں سے نکالے جانے کے بالترتیب کیا احتمال ہیں۔

امتحانوں کی ایک بہت بڑی تعداد ع پر غور کرو، چونکہ واقعہ واقع

ہونے سے پہلے ہر ایک بٹوے کے لئے جانے کا مساوی امکان ہے،
ہم فرض کر سکتے ہیں کہ پہلے بٹوے کا انتخاب $\frac{ع}{۲}$ امتحانوں میں ہوگا
اور ان کے $\frac{۵}{۸}$ میں پونڈ نکالا جائے گا یعنی پہلے بٹوے میں

سے $\frac{۵}{۸} \times \frac{۱}{۲}$ ع یا $\frac{۵}{۱۶}$ ع مرتبہ پونڈ نکالا جائے گا۔

دوسرا بٹوا بھی $\frac{ع}{۲}$ امتحانوں میں منتخب کیا جا سکتا ہے اور

اور ان کے $\frac{۳}{۴}$ میں پونڈ نکلیگا۔ یعنی دوسرے بٹوے میں سے

$\frac{۳}{۸}$ ع مرتبہ پونڈ نکلیگا۔

اب ع بہت بڑا ہے لیکن سوائے اس کے یہ بالکل اختیاری
عدد ہے۔ یہ فرض کرو کہ ع = ۱۶ ن، پس ایک پونڈ پہلے
بٹوے میں سے ۵ ن مرتبہ اور دوسرے میں سے ۶ ن مرتبہ
نکالا جائے گا۔ یعنی اگر یہ کل ۱۱ ن مرتبہ نکالا جائے تو ۵ ن مرتبہ
پہلے بٹوے میں سے اور ۶ ن مرتبہ دوسرے بٹوے میں سے نکلیگا۔
پس اس امر کا احتمال کہ پونڈ پہلے بٹوے سے نکالا گیا ہے $\frac{۵}{۱۱}$
ہے اور دوسرے بٹوے سے نکالے جانے کا احتمال $\frac{۶}{۱۱}$ ہے۔

۴۶۹۔ یہ نہایت ضروری ہے کہ طالب علم دفعہ ماقبل کے مفروضہ
کی ماہیت سے پورا واقف ہو جائے۔ ہم ایک خاص مثال لیکر اس
کی مزید توضیح کرتے ہیں۔ اگر ایک متشاکل اور منتظم مکعب مہرہ کو ۶۰
مرتبہ پھینکا جائے تو یہ ممکن ہے کہ یکہ ٹھیک ۱۰ بار نکلے لیکن یا ایسا ہو
اس میں شبہ نہیں کہ اگر ہم انداختوں کی تعداد کو متواتر بڑھاتے جائیں
تو ان انداختوں کی تعداد جن میں یکہ برآمد ہوتا ہے اور کل انداختوں
کی تعداد کی باہمی نسبت بتدریج $\frac{۱}{۶}$ کے قریب قریب آتی جائے گی
کیونکہ یہ فرض کرنے کی کوئی وجہ نہیں ہے کہ کوئی خاص رخ باقی زجوں

کی نسبت زیادہ مرتبہ برآمد ہوگا۔ پس بالآخر ہر ایک رُخ کے برآمد ہونے کی نسبت تقریباً وہی ہونی چاہئے۔

اوپر کی مثال ایک عام مسئلہ کی جسکو جیمز برنالی نے دریافت کیا تھا ایک خاص صورت ہے۔ موخرالذکر مسئلہ اپنے موجد کی وفات کے ۸ سال بعد ۱۷۱۳ء میں کتاب آرس کان جکٹنڈی میں طبع ہوا تھا۔ برنالی کے مسئلہ کا دعوٰے یہ ہے۔

اگر ایک واحد امتحان میں ایک واقعہ کے واقع ہونے کا احتمال ق ہو تو امتحانوں کی تعداد کو لاانتہا بڑھا دینے سے یہ امر یقینی ہو جاتا ہے کہ کامیابیوں کی تعداد کو کل امتحانوں کی تعداد کے ساتھ نسبت ق ہوگی۔ بالفاظ دیگر اگر امتحانوں کی تعداد ع ہو تو کامیابیوں کی تعداد ق ع ہوگی۔

ملاحظہ ہو ٹاڈہنٹر کی تاریخ احتمال (ہسٹری آف پروبے بلی ٹی) باب ہفتم۔ برنالی کے اس مسئلے کا ثبوت انسائیکلوپیڈیا برٹانیکا میں احتمال (پروبے بلی ٹی) کے مضمون میں دیا ہوا ہے۔

۴۷۰۔ ایک مشاہدہ شدہ واقعہ کئی غیر متعلق اسباب میں سے کسی ایک سبب سے واقع ہوا ہے۔ کسی ایک مخصوص سبب کے اصلی سبب ہونے کا احتمال دریافت کرو۔

فرض کرو کہ کل اسباب ن ہیں اور واقعہ کے واقع ہونے سے قبل ان اسباب کی موجودگی کے احتمال بالترتیب ق۱، ق۲، ق۳ ..... قن دریافت کئے گئے ہیں۔ نیز فرض کرو کہ جب ر واں سبب موجود ہو تو اس کی بناء پر واقعہ کے واقع ہونے کا احتمال قَر ہے۔ واقعہ کے وقوع پذیر ہونے کے بعد ر ویں سبب کے اصلی سبب ہونے کا احتمال دریافت کرنا مقصود ہے۔

امتحانوں کی کسی بہت بڑی تعداد ع پر غور کرو۔ تب پہلا سبب ان میں سے ق۱ ع میں موجود ہو گا اور اس تعداد میں سے

$ق_1 ق'_1 ع$ میں واقعۂ مذکور واقع ہوگا۔ اسی طرح سے $ق_2 ق'_2 ع$ امتحانوں میں واقعۂ مذکور دوسرے سبب کی وجہ سے واقع ہوگا اور اسی طرح سے باقی ہر ایک سبب کے لئے۔ پس اُن امتحانوں کی تعداد جن میں واقعہ واقع ہوگا۔

$$(ق_1 ق'_1 + ق_2 ق'_2 + \dots + ق_ن ق'_ن) ع \quad یا \quad ع \Sigma (ق ق')$$

ہے۔ نیز اُن امتحانوں کی تعداد جن میں واقعۂ مذکور رُ ویں سبب کی وجہ سے واقع ہوتا ہے $ق_ر ق'_ر ع$ ہے، پس واقعہ کے وقوع پذیر ہو جانے کے بعد رُ ویں سبب کے اصلی سبب یعنی واقعۂ مذکور کا موجب ہونے کا احتمال

$$ق_ر ق'_ر ع \div ع \Sigma (ق ق')$$

ہے، پس رُ ویں سبب سے واقعۂ مذکور کے وقوع کا احتمال

$$\frac{ق_ر ق'_ر}{\Sigma ق ق'}$$

ہے۔

۱۷۴۔ یہ نہایت ضروری ہے کہ کسی واقعہ کے وقوع سے قبل متعدد اسباب کی موجودگی کے احتمال اور وقوع کے بعد کسی سبب کے اصلی سبب ہونے کے احتمال میں بخوبی تمیز کیا جائے۔ اول الذکر کو بالعموم احتمال مقدم سے موسوم کرتے ہیں اور $ق_1$، $ق_2$، $ق_3$ .... $ق_ن$ سے تعبیر کرتے ہیں، موخرالذکر کو احتمال موخرہ کہتے ہیں۔ اگر اِن کو $ف_1$، $ف_2$، $ف_3$ ..... $ف_ن$ سے تعبیر کیا جائے تو ہم ابھی ثابت کر چکے ہیں کہ

$$ف_ر = \frac{ق_ر ق'_ر}{\Sigma (ق ق')}$$

جہاں $ق'_{ر}$، ر ویں سبب کی موجودگی کے مفروضہ کی بنا پر واقعۂ مذکور کے وقوع کے احتمال کو ظاہر کرتا ہے۔

اس نتیجہ سے ظاہر ہے کہ $ح\, ف = ۱$، اور یہ امر ویسے ہی صاف عیاں ہے کیونکہ واقعہ ان اسباب میں سے کسی ایک اور صرف ایک ہی سبب سے ظہور پذیر ہوا ہے۔

اب ہم دفعۂ ماقبل کے مسئلہ کا ایک اور ثبوت ذیل میں درج کرتے ہیں جو دفعہ ۴۶۹ کے اصول پر مبنی نہیں ہے۔

۴۷۴۔ ایک مشاہدہ کردہ واقعہ چند غیر متعلق اسباب میں سے کسی ایک کی وجہ سے واقع ہوا ہے۔ کسی ایک مخصوص سبب کے اصلی سبب ہونے کا احتمال دریافت کرو۔

فرض کرو کہ کل ن اسباب ہیں۔ اور واقعہ کے قبل ان اسباب کی موجودگی کے احتمال بالترتیب $ق_{۱}$، $ق_{۲}$، $ق_{۳}$، …… $ق_{ن}$ ہیں

نیز فرض کرو کہ جب ر واں سبب موجود ہو تو واقعہ کے واقع ہونے کا احتمال $ق'_{ر}$ ہے، تب ر ویں سبب سے واقع ہونے کا احتمال مقدم $ق_{ر} ق'_{ر}$ ہے۔

فرض کرو کہ ر ویں سبب کے اصلی سبب ہونے کا احتمال موخر $ف_{ر}$ ہے، تب ر ویں سبب کے اصلی سبب ہونے کا احتمال یعنی $ف_{ر}$ متناسب ہے اُس احتمال کے جو اس بنا پر محسوب کیا جائے کہ یہ سبب موجود ہے اور اس کی موجودگی میں واقعۂ مذکور کے واقع ہونے کے احتمال یہ ہے، اس لئے

$$\frac{ف_{۱}}{ق_{۱} ق'_{۱}} = \frac{ف_{۲}}{ق_{۲} ق'_{۲}} = \dots = \frac{ف_{ن}}{ق_{ن} ق'_{ن}} = \frac{ح(ف)}{ح\, ق ق'} = \frac{۱}{ح(ق ق')}$$

$$\therefore ف_{ر} = \frac{ق_{ر} ق'_{ر}}{ح(ق ق')}$$

اس سے ظاہر ہے کہ موجودہ طرز کے سوالوں میں سب سے پہلے حاصل ضرب $\text{ق}\,\text{ق}'$ کی درست قیمت نکال لینی چاہیئے۔ بہت سی صورتوں میں ق، ق_1، ق_2 ...... سب مساوی ہوتے ہیں جس سے عمل بہت مختصر ہو جاتا ہے۔

مثال۔ تین تھیلیوں میں سے ہر ایک میں ۵ سفید گیند ہیں اور ۲ سیاہ گیند اور دو اور تھیلیاں ہیں جن میں سے ہر ایک میں ۱ سفید گیند ہے اور ۴ سیاہ۔ اگر ایک سیاہ گیند نکلے تو اس گیند کے تھیلیوں کے اول جٹ میں سے نکلنے کا کیا احتمال ہے۔

۵ تھیلیوں میں سے تین تھیلیاں پہلے جٹ کی ہیں اور دو دوسرے کی۔ اس لئے

$$\text{ق}_1 = \frac{3}{5} \quad \text{اور} \quad \text{ق}_2 = \frac{2}{5}$$

اگر پہلے جٹ میں سے ایک تھیلی لی جائے تو اس میں سے سیاہ گیند کے نکلنے کا احتمال $\frac{2}{7}$ ہے، اگر دوسرے جٹ میں سے ایک تھیلی لیجائے تو اس میں سے سیاہ گیند نکلنے کا احتمال $\frac{4}{5}$ ہے

$$\text{پس} \quad \text{ق}'_1 = \frac{2}{7} \quad \text{اور} \quad \text{ق}'_2 = \frac{4}{5}$$

$$\therefore \text{ق}_1\text{ق}'_1 = \frac{6}{35} \quad \text{اور} \quad \text{ق}_2\text{ق}'_2 = \frac{8}{25}$$

پس گیند مذکور کے پہلے جٹ میں نکلنے کا احتمال

$$\frac{6}{35} \div \left(\frac{6}{35} + \frac{8}{25}\right) = \frac{15}{43} \quad \text{ہے۔}$$

۴۷۳۔ جب کوئی خاص واقعہ مشاہدہ کے تحت میں آجائے تو ہم نے دیکھا کہ دفعہ ۴۷۲ کی مدد سے کسی خاص سبب کے اس واقعہ پر منتج ہونے کا احتمال دریافت ہو سکتا ہے۔ اس کے بعد

ہم دوسرے امتحان میں واقعۂ مذکور کے واقع ہونے کا احتمال معلوم
کرسکتے ہیں یا کسی اور واقعہ کے وقوع کا احتمال محسوب کرسکتے ہیں
مثلاً فرض کرو کہ ر ویں سبب کی موجودگی میں واقعۂ مذکور کے
وقوع کا احتمال قَر ہے اور ر ویں سبب کے اصلی سبب ہونیکا
احتمال فر ہے، پس دوسرے امتحان میں ر ویں سبب
کی بنا پر واقعۂ مذکور کے وقوع پذیر ہونے کا احتمال قَر فر ہے
لہذا اسباب زیر بحث میں سے کسی ایک سبب سے واقعۂ مذکورہ
کے وقوع پذیر ہونے کا احتمال ح (قَ ف) ہے۔

مثال۔ ایک بٹوے میں ۴ سکے ہیں جو یا پونڈ ہیں یا شلنگ، ۲
سکوں کو نکال کر دیکھا گیا ہے یہ دونوں شلنگ ہیں۔ ان کو واپس
رکھہ دیا گیا ہے۔ ایک اور امتحان سے پونڈ نکلنے کا کیا احتمال ہے۔
اس سوال کے دو مفہوم ہو سکتے ہیں، ان دونوں پر ہم جداگانہ
بحث کرینگے۔

۱۔ اگر ہم یہ خیال کریں کہ شلنگوں کی کسی تعداد کے لئے جانے کا
مساوی امکان ہے تو ذیل کے تین مفروضے حاصل ہوتے ہیں۔
(۱) ممکن ہے کہ تمام سکے شلنگ ہوں، (۲) تین سکے شلنگ ہوں
(۳) دو سکے شلنگ ہوں۔

یہاں $ف_۱ = ف_۲ = ف_۳$

نیز $قَ_۱ = ۱$، $قَ_۲ = \frac{۱}{۲}$، $قَ_۳ = \frac{۱}{۶}$

پس پہلے مفروضہ کا احتمال $= ۱ \div (۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۶}) = \frac{۶}{۱۰} = ف_۱$

دوسرے مفروضہ کا احتمال $= \frac{۱}{۲} \div (۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۶}) = \frac{۳}{۱۰} = ف_۲$

تیسرے مفروضہ کا احتمال $= \frac{۱}{۶} \div (۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۶}) = \frac{۱}{۱۰} = ف_۳$

پس ایک اور امتحان سے پونڈ نکلنے کا احتمال $= (\text{ف}_1 \times 0) + (\text{ف}_2 \times \frac{1}{4}) + (\text{ف}_3 \times \frac{2}{4})$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{3}{10} + \frac{2}{4} \times \frac{1}{10} = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}$$

۲۔ اگر ہر ایک سکے کے پونڈ یا شلنگ ہونے کا مساوی امکان ہے تو $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})^4$ کے پھیلاؤ کی رقوم سے ہم دیکھتے ہیں کہ چار شلنگوں کا احتمال $\frac{1}{16}$ ہے، تین شلنگوں کا $\frac{4}{16}$ یعنی $\frac{1}{4}$ ہے، دو شلنگوں کا احتمال $\frac{6}{16}$ یعنی $\frac{3}{8}$ ہے۔

پس $\text{ق}_1 = \frac{1}{16}$، $\text{ق}_2 = \frac{4}{16}$، $\text{ق}_3 = \frac{6}{16}$

نیز $\text{ق}'_1 = 1$، $\text{ق}'_2 = \frac{1}{2}$، $\text{ق}'_3 = \frac{1}{6}$

لہٰذا $\frac{\text{ف}_1}{6} = \frac{\text{ف}_2}{12} = \frac{\text{ف}_3}{6} = \frac{\text{ف}_1 + \text{ف}_2 + \text{ف}_3}{24} = \frac{1}{24}$

پس ایک اور امتحان میں پونڈ نکلنے کا احتمال

$$= (\text{ف}_1 \times 0) + (\text{ف}_2 \times \frac{1}{4}) + (\text{ف}_3 \times \frac{2}{4}) = \frac{1}{8} + \frac{2}{16} = \frac{1}{4}$$

اب ہم یہ بتائینگے کہ اگر ہمیں چند گواہوں کے متعلق یہ معلوم ہو کہ وہ کس درجہ قابل اعتماد ہیں تو ہم احتمال کے نظریہ کی مدد سے کس طرح ان کی شہادتوں کی صداقت کا اندازہ لگا سکتے ہیں۔ ہم یہاں تسلیم کرینگے کہ ہر ایک گواہ جو شہادت دیتا ہے اسکو اپنے ذہن میں بالکل برحق اور سچی سمجھتا ہے خواہ اُس کا بیان تجربہ، مشاہدہ یا استدلال پر مبنی ہو۔ پس ہر ایک غلطی یا دروغ گوئی کو اسکی دانست کی غلطی پر محمول کرنا چاہئے نہ کہ بالارادہ فریب کاری پر۔

جس قسم کے مسائل پر اب ہم بحث کرینگے وہ علمی اور عقلی مہارت کے لئے نہایت مفید اور سُود مند ہیں۔ اگرچہ اِن نتائج سے کوئی خاص فائدہ حاصل نہیں ہوتا تاہم یہ سب عام عقل وفہم کے عین مطابق ہیں۔

۵۷۴۔ جب ہم یہ کہتے ہیں کہ کسی شخص کے سچ بولنے کا احتمال ق ہے تو اِس سے ہماری مراد یہ ہوتی ہے کہ اگر اُس شخص کی شہادتوں کی ایک کثیر تعداد کا معائنہ کیا جائے تو اُن شہادتوں کی نسبت جو سچی ثابت ہوں شہادتوں کی کل تعداد کے ساتھ ق ہے۔

۵۷۶۔ دو گواہ جن کو ایک دوسرے سے کچھہ تعلق نہیں ہے اور جن کے سچ بولنے کے احتمال بالترتیب ق اور قَ ہیں ایک ہی شہادت پیش کرتے ہیں۔ بتاؤ کہ شہادت کے سچے ہونے کا کیا احتمال ہے۔

یہاں مشاہدہ شدہ واقعہ یہ ہے کہ ا اور ب دونوں ایک ہی شہادت دیتے ہیں۔ واقعہ سے قبل ۴ مفروضے ہیں، کیونکہ ممکن ہے کہ (۱) ا اور ب دونوں سچ بولیں، (۲) ا سچ بولے اور ب جھوٹ بولے (۳) ا جھوٹ بولے اور ب سچ بولے (۴) ا اور ب دونوں جھوٹ بولیں۔ اِن چاروں مفروضوں کے احتمال بالترتیب

ق قَ، ق(۱-قَ)، قَ(۱-ق)، (۱-ق)(۱-قَ)

ہیں۔ پس مشاہدہ شدہ واقعہ کے بعد جس میں ا اور ب دونوں ایک ہی شہادت دیتے ہیں شہادت کے سچا ہونے کے احتمال کو شہادت کے جھوٹا ہونے کے احتمال کے ساتھ نسبت ق قَ : (۱-ق)(۱-قَ) ہے۔ یعنی شہادت کے سچا ہونیکا

احتمال $\dfrac{\text{ق ق}'}{\text{ق ق}' + (\text{۱} - \text{ق})(\text{۱} - \text{ق}')}$ ہے۔

اسی طرح سے اگر ایک تیسرا شخص وہی شہادت دے اور اسکے سچ بولنے کا احتمال ق'' ہو تو شہادت کے سچا ہونے کا احتمال

$$\frac{\text{ق ق}'\text{ ق}''}{\text{ق ق}'\text{ ق}'' + (\text{۱} - \text{ق})(\text{۱} - \text{ق}')(\text{۱} - \text{ق}'')}$$

ہے اور علیٰ ہذا القیاس گواہوں کی کسی تعداد کے لئے

۷۷۴۔ دفعۂ ماقبل میں ہم نے یہ فرض کرلیا ہے کہ ہمیں ا اور ب کے بیانات کے علاوہ واقعہ کے متعلق کوئی علم نہیں ہے اگر ہمارے پاس اِن بیانات کے علاوہ واقعۂ مذکورہ کی صداقت یا دروغ کے احتمال کو معلوم کرنے کے اور ذرائع بھی موجود ہوں تو مختلف مفروضات کے احتمال معلوم کرنے کے لئے اِن ذرائع کو بھی ملحوظ رکھنا چاہئے۔
مثلاً اگر ا اور ب ایک بیان میں متفق ہوں جسکا احتمال مقدم $\text{ق}_\text{۱}$ ہو تو اُس بیان کی صداقت اور دروغ کے احتمال بالترتیب

$\text{ق}_\text{۱}\text{ ق ق}'$ اور $(\text{۱} - \text{ق}_\text{۱})(\text{۱} - \text{ق})(\text{۱} - \text{ق}')$ ہوں گے۔

مثال۔ ۱۲ ٹکٹوں کی ایک لاٹری میں دو انعام ہیں: ایک ۹ پونڈ کا اور دوسرا ۳ پونڈ کا۔ ا، ب اور ج جن کے سچ بولنے کے احتمال بالترتیب $\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$، $\frac{\text{۲}}{\text{۳}}$ اور $\frac{\text{۳}}{\text{۵}}$ ہیں د کو جس کے پاس ایک ٹکٹ ہے نتیجہ سے اس طرح معلوم کرتے ہیں: ا اور ب کہتے ہیں کہ اُس نے ۹ پونڈ کا انعام جیتا ہے اور ج کہتا ہے کہ اُس نے ۳ پونڈ والا انعام جیتا ہے، د کی توقع محسوب کرو۔
تین صورتیں ممکن ہیں (۱) د نے ۹ پونڈ والا انعام جیتا ہو (۲) ۳ پونڈ والا انعام جیتا ہو (۳) ا، ب اور ج تینوں نے جھوٹ

بولا ہو اور د نے کوئی انعام نہ جیتا ہو۔
اب دفعہ ۴۷۲ کے طریق کتابت کے موافق احتمال مقدم

$$ق_1 = \frac{1}{12}، \quad ق_2 = \frac{1}{12} \quad ق_3 = \frac{10}{12}$$

ہیں، نیز $ق'_1 = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{30}$، $ق'_2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{30}$

$$ق'_3 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{30}$$

$$\therefore \frac{ف_1}{4} = \frac{ف_2}{3} = \frac{ف_3}{20} = \frac{1}{27}$$

لہذا د کی توقع = ۹ پونڈ کا $\frac{4}{27}$ + ۳ پونڈ کا $\frac{3}{27}$

= ۱ پونڈ ۱۳ شلنگ ۴ پینس

۴۷۸۔ یہ بات قابل غور ہے کہ جو نتائج ہم نے دفعہ ۴۷۶ میں ثابت کئے ہیں اُن میں ہم نے فرض کرلیا ہے کہ بیان صرف دو طریقوں سے دیا جاسکتا ہے یعنی اگر سب گواہ متفق طور پر جھوٹ بولیں تو وہ سب ایک ہی جھوٹا بیان دینگے۔
اگر یہ صورت نہ ہو تو فرض کرو کہ ا اور ب دونوں کے ایک ہی جھوٹا بیان دینے کا احتمال ج ہے، تب بیان کے سچا ہونے کے احتمال کو اِس کے جھوٹا ہونے کے احتمال کے ساتھ نسبت

$$ق ق' : ج (۱ - ق)(۱ - ق')$$

ہے
عام طور پر یہ ایک نہایت غیر اغلب امر ہے کہ دو غیر متعلق گواہ متفقہ طور پر ایک ہی جھوٹ بولیں۔ لہذا ج بالعموم بہت چھوٹا ہوتا ہے اور نیز جوں جوں گواہوں کی تعداد بڑھتی جائے ج بتدریج اور بھی کم ہوتا جاتا ہے۔ اُن امور کا لحاظ رکھنے سے ظاہر ہے کہ اگر

دو یا زیادہ غیر متعلق گواہ ایک ہی بیان پر متفق ہوں تو خواہ اُن گواہوں کا اعتماد بہت کم ہو تو بھی بیان مذکور کے سچا ہونے کا احتمال بڑھ جاتا ہے۔

مثال۔ ا کے ۴ بیانوں میں سے ۳ بیان سچے ہوتے ہیں اور ب کے ۱۰ میں سے ۷۔ یہ دونوں اس بات پر متفق ہیں کہ ایک تھیلی میں سے جسمیں مختلف رنگوں کے گیند ہیں ایک سفید گیند نکالا گیا ہے۔ اس بیان کے سچا ہونے کا احتمال دریافت کرو۔

اس میں صرف دو مفروضے ہو سکتے ہیں، (۱) یہ متفقہ شہادت سچ ہے یا (۲) جھوٹ۔

$$\text{یہاں}\quad \text{ق}_1 = \frac{1}{6}\,،\quad \text{ق}_2 = \frac{5}{6}$$

$$\text{ق}'_1 = \frac{3}{4} \times \frac{7}{10}\,،\quad \text{ق}'_2 = \frac{1}{25} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{10}$$

کیونکہ $\text{ق}'_2$ کی قیمت معلوم کرنے میں ہمیں اس کے احتمال کو ملحوظ رکھنا چاہئے کہ ا اور ب سفید رنگ کے گیند کو منتخب کریں جبکہ سفید گیند تھیلی سے نہ نکالا گیا ہو۔ یہ احتمال

$$\frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{25} \text{ ہے}$$

اب ان دو مفروضوں کے احتمالوں کی نسبت $\text{ق}_1\text{ق}'_1 : \text{ق}_2\text{ق}'_2$ یعنی ۳۵ : ۱ ہے

پس بیان مذکور کے سچا ہونے کا احتمال $\frac{35}{36}$ ہے۔

۴۷۹۔ جن صورتوں پر ہم نے بحث کی ہے وہ سب کی سب ہمعصر شہادت کی سچائی کے احتمال کے متعلق تھیں۔ منقولی شہادت کی ایک مثال ذیل میں درج کی جاتی ہے۔

ا کہتا ہے کہ ایک واقعہ واقع ہوا اور اس واقعہ کے وقوع یا عدم وقوع کی اطلاع اس نے ب سے پائی ہے، بتاؤ کہ واقعہ کے وقوع کا

کیا احتمال ہے۔

واقعہ مذکور واقع ہوا ہے (۱) اگر ان دونوں نے سچ بولا ہے (۲) یا اگر ان دونوں نے جھوٹ بولا ہے اور واقعہ نہیں ہوا اگر ان میں سے ایک نے سچ بولا ہے اور دوسرے نے جھوٹ۔

فرض کرو کہ ا اور ب کے سچ بولنے کے احتمال ق اور قَ ہیں تب واقعہ کے واقع ہونے کا احتمال

$$\text{ق قَ} + (\text{۱} - \text{ق})(\text{۱} - \text{قَ})$$

ہے اور واقعہ کے واقع نہ ہونے کا احتمال

$$\text{ق}(\text{۱} - \text{قَ}) + \text{قَ}(\text{۱} - \text{ق})$$

ہے۔

۴۸۰۔ دفعۂ ماقبل کے مسئلہ کا جو حل عام کتابوں میں دیا جاتا ہے وہی یہاں درج کیا گیا ہے در حقیقت ایسا کرنا اعتراض سے خالی نہیں کیونکہ یہ کہنا کہ اگر ا اور ب دونوں نے سچ نہیں بولا تو واقعہ مذکور واقع ہوا ہے صرف اسی صورت میں درست ہو سکتا ہے جبکہ بیان صرف دو طریقوں سے دیا جا سکے نیز یہ امر بھی کہ ا نے ب سے اطلاع پائی ہے پورے طور پر درست تصور نہیں کیا جا سکتا کیونکہ اس کی صداقت کا دارومدار بھی ا کے بیان پر ہی ہے۔

اس سوال کو جو مختلف معنی دئے جا سکتے ہیں اور ان معنوں کے متناظر مسئلہ مذکور کے مختلف حلوں پر ایجوکیشنل ٹائمز ریپرنٹ جلد ۲۷، ۳۲ پر بسیط اور مدلل بحث کی گئی ہے۔

امثلہ نمبری ۳۲ (د)

۱۔ ایک تھیلی میں ۴ گیند ہیں لیکن یہ معلوم نہیں کہ وہ کس رنگ کے ہیں، ایک گیند کو نکال کر دیکھا گیا ہے کہ وہ سفید ہے۔ سب گیندوں کے سفید ہونے کا کیا احتمال ہے۔

۲۔ ایک تھیلی میں نا معلوم رنگوں کے چھ گیند ہیں، تین گیندوں کو نکال کر دیکھا گیا ہے کہ ان تینوں کا رنگ سیاہ ہے۔ تھیلی میں اور کسی سیاہ گیند کے باقی نہ رہنے کا کیا احتمال ہے۔

۳۔ ایک کتاب میں ایک لفظ کا کچھ حصہ چھپائی میں حذف ہو گیا ہے، آخر کے دو حروف و ن، پڑھے جا سکتے ہیں، یہ معلوم ہے کہ یا یہ لفظ "صورتوں" ہے یا "مصاحبوں"، بتاؤ کہ اس لفظ کے "صورتوں" ہونے کا کیا احتمال ہے۔

۴۔ ایک کھیل کے شروع ہونے سے قبل تین کھلاڑیوں ا، ب، ج کی کامیابیوں کے احتمال بالترتیب ۵، ۳، ۲ کے متناسب ہیں۔ لیکن اثنائے کھیل میں کسی حادثہ کی وجہ سے ا کا احتمال پہلے احتمال کا $\frac{1}{4}$ رہ جاتا ہے۔ اب ب اور ج کے الگ الگ کیا احتمال ہیں۔

۵۔ ایک بٹوے میں نا معلوم قیمت کے ن سکے ہیں، ایک سکہ نکال کر دیکھا گیا ہے کہ یہ پونڈ ہے، تھیلی میں صرف اسی ایک سکہ کے پونڈ ہونے کا کیا احتمال ہے؟

۶۔ ایک آدمی کے پاس ۱۰ شلنگ ہیں اور ان میں سے ایک پر دونوں طرف مورتیں ہیں۔ وہ آدمی علی الحساب ایک شلنگ لیکر اسکو ۵ دفعہ اچھالتا ہے اور پانچوں دفعہ مورت نکلتی ہے، بتاؤ کہ اس شلنگ کے دو مورتوں والے شلنگ ہونے کا کیا احتمال ہے۔

۷۔ ایک تھیلی میں نامعلوم رنگوں کے ۵ گیند ہیں۔ دو مرتبہ ایک گیند نکالا گیا ہے اور واپس رکھدیا گیا ہے اور دونوں مرتبہ یہ گیند سرخ نکلا ہے۔ اب اگر ایک ہی مرتبہ دو گیند نکالے جائیں تو ان دونوں گیندوں کے سرخ ہونے کا کیا احتمال ہے۔

۸۔ ایک بٹوے میں ۵ سکے ہیں اور ان میں سے ہر ایک یا نصف شلنگ یا شلنگ ہے۔ دو کو نکال کر دیکھا گیا ہے کہ یہ دونوں شلنگ ہیں۔ باقی سکوں کی ظنی قیمت معلوم کرو۔

۹۔ ایک مہرے کو تین بار پھینکا گیا ہے اور جو تین عدد نکلے ہیں اُن کا حاصل جمع ۱۵ ہے۔ پہلی انداخت میں جو عدد نکلا تھا اس کے ۴ ہونے کا کیا احتمال ہے۔

۱۰۔ ا کے چار بیانوں میں سے تین بیان سچے ہوتے ہیں اور ب کے چھ میں سے پانچ، ایک ہی بیان کے اظہار میں دونوں کے ایک دوسرے کی تردید کرنے کا کیا احتمال ہے؟

۱۱۔ ا کی تین باتوں میں سے ۲ باتیں سچی نکلتی ہیں اور ب کی پانچ میں سے چار، وہ دونوں اس بیان میں متفق ہیں کہ ایک تھیلی میں سے جسمیں مختلف رنگوں کے چھ گیند ہیں ایک سرخ گیند نکالا گیا ہے۔ اس بیان کے سچے ہونے کا احتمال محسوب کرو۔

۱۲۔ ۵۲ پتوں کی ایک تاش میں سے ایک پتہ گم ہوگیا ہے، باقی تاش میں سے دو پتے نکالے گئے ہیں اور یہ دونوں حکم کے پتے ہیں، گم شدہ پتے کے حکم کا پتا ہونے کا کیا احتمال ہے۔

۱۳۔ ایک لاٹری میں ۱۰ ٹکٹ ہیں اور ۵ پونڈ اور ۱ پونڈ کے دو انعام ہیں۔ ب، ا کو جس کے پاس ایک ٹکٹ ہے اطلاع دیتا ہے کہ اس نے ۵ پونڈ کا انعام جیتا ہے، ج، ا کو اطلاع دیتا ہے کہ اس نے ایک پونڈ کا انعام جیتا ہے، اگر ب کا اعتماد $\frac{2}{3}$ ہو اور ج کا $\frac{3}{4}$ تو ا کی توقع کی قیمت معلوم کرو۔

۱۴۔ ایک بٹوے میں ۴ سکے ہیں اور ان میں سے دو کو نکال کر دیکھا گیا ہے کہ یہ دونوں پونڈ ہیں، بتاؤ کہ (۱) سب سکوں کے پونڈ ہونے کا اور (۲) اگر سکے واپس رکھ دئے جائیں تو پھر نکالنے پر پونڈ نکلنے کا کیا احتمال ہے۔

۱۵۔ ف، ق کے ساتھ ۸ پونڈ: ۱۲۰ پونڈ کی شرط لگاتا ہے کہ تین گھڑ دوڑوں میں تین گھوڑے ا، ب اور ج جیتنگے جن کے خلاف شرطیں بالترتیب ۳ : ۲، ۴ : ۱، ۲ : ۱ ہیں۔ پہلی گھڑ دوڑ میں

د جیتتا ہے، اور یہ بھی معلوم ہے کہ دوسری گھڑ دوڑ میں یا ب جیتتا ہے یا کوئی اور گھوڑا د جسکے خلاف توقع ۲:۱ ہے، ف کی توقع کی قیمت معلوم کرو۔

۱۶۔ ایک تھیلی میں ن گیند ہیں جو یا سیاہ ہیں یا سفید، ہر قسم کے گیندوں کے سب عددوں کا امکان مساوی ہے۔ ایک گیند نکال کر دیکھا گیا ہے کہ وہ سفید ہے، اس کو واپس رکھ دیا گیا ہے۔ پھر ایک گیند نکالا گیا ہے یہ بھی سفید ہے، اگر اس کو بھی واپس رکھ دیا جائے تو ثابت کرو کہ اب جو گیند نکلیگا اس کے سیاہ ہونیکا احتمال $\frac{1}{2}$ (ن - ۱) (۲ ن + ۱)$^{-1}$ ہے۔

۱۷۔ م ن سکّے م بٹوؤں میں تقسیم کئے گئے ہیں یعنی ہر بٹوے میں ن سکّے ڈالے گئے ہیں۔ (۱) دو مخصوص سکّوں کے ایک ہی بٹوے میں ہونے کا کیا احتمال ہے (۲) اگر ر بٹوؤں کو دیکھا گیا ہو اور ان میں سے کسی میں سے بھی ان مخصوص سکّوں میں سے کوئی سکّہ برآمد نہ ہو تو یہ احتمال کیا ہو جائیگا۔

۱۸۔ ا اور ب دو طلبہ فن ریاضی میں کمزور ہیں اور ان کے ایک سوال کو حل کرنے کے احتمال جداگانہ $\frac{1}{8}$ اور $\frac{1}{12}$ ہیں، دونوں کا جواب ایک ہی ہے۔ اگر ان کے ایک ہی غلطی کے مرتکب ہونے کے خلاف امکان ۱۰۰۰ : ۱ ہو تو جواب کے درست ہونے کا کیا احتمال ہے؟

۱۹۔ ۱۰ گواہ ایسے ہیں کہ ہر ایک کے چھ بیانوں میں سے ایک جھوٹا ہوتا ہے، وہ سب اس بات پہ متفق ہیں کہ ایک واقعہ ہوا۔ ثابت کرو کہ اس بیان کے موافق امکان ۵ : ۱ ہے جبکہ احتمال مقدم ایک چھوٹی مقدار $\frac{1}{5^9 + 1}$ کے مساوی ہے۔

مقامی احتمال - ہندسی طریقے

۱۸۴ - احتمال کے مسائل کے حل کرنے کے لئے علم ہندسہ سے مدد لینے میں بالعموم احصائے تکملات سے کام لینا پڑتا ہے۔ تاہم بعض آسان سوالات ایسے بھی ہیں جو محض ابتدائی ہندسہ کی مدد سے حل ہو سکتے ہیں۔

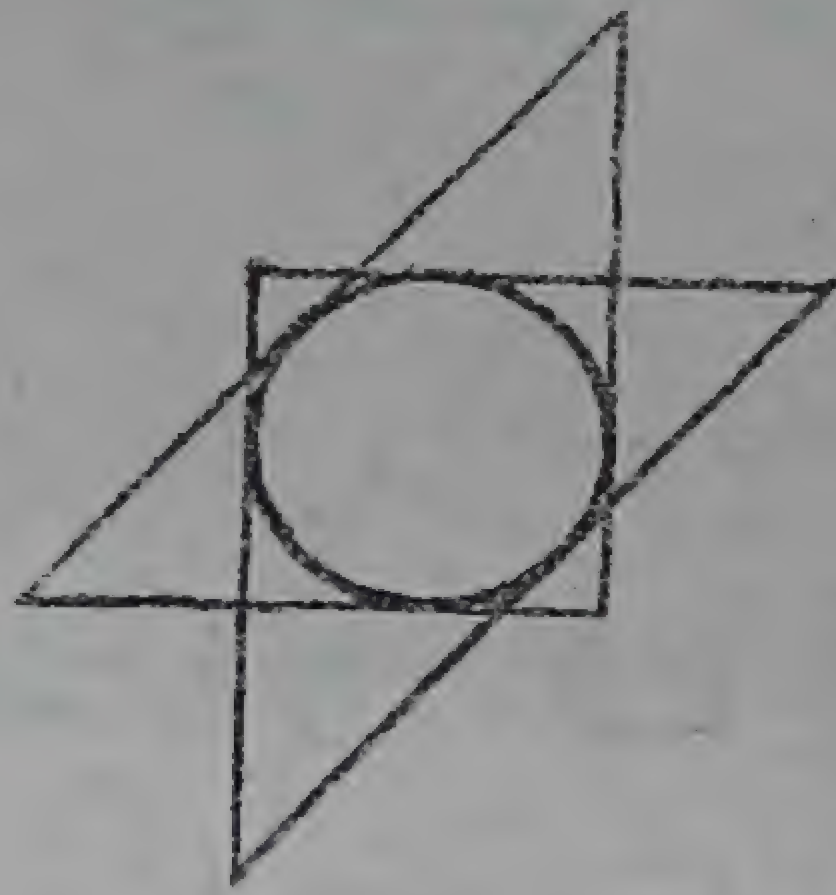
مثال ۱ - دو مستقیم خطوں میں سے ہر ایک کا طول ل ہے، ان دونوں میں سے علی الحساب کچھ حصہ کاٹ کر الگ کر دیا گیا ہے، باقی طولوں کے حاصل جمع کے ل سے کم ہونے کا کیا احتمال ہے۔

دونوں خطوں کو ایک دوسرے کے متوازی رکھو اور فرض کرو کہ قطع کرنے کے بعد دائیں جانب کے حصے خارج کر دئے گئے ہیں۔ تب اوپر کا سوال ذیل کے سوال کے ہم معنی ہے: دائیں جانب کے حصوں کے حاصل جمع کا بائیں طرف کے حصوں کے حاصل جمع سے بڑے ہونے کا کیا احتمال ہے۔ ظاہر ہے کہ پہلے حاصل جمع کے دوسرے حاصل جمع سے بڑے یا چھوٹے ہونے کے امکان مساوی ہیں۔ پس مطلوبہ احتمال $\frac{1}{2}$ ہے۔

نتیجہ صریح - اگر یہ معلوم ہو کہ دونوں خطوں میں سے کسی ایک کا طول ل سے بڑا نہیں ہے تو ان کے حاصل جمع کے ل سے بڑا نہ ہونے کا احتمال $\frac{1}{2}$ ہے۔

مثال ۲ - اگر تین خط علی الحساب طولوں کے لئے جائیں تو بتاؤ کہ ان سے ایک مثلث بن سکنے کا امکان مثلث نہ بن سکنے کے امکان کے مساوی ہے۔

ان تین خطوں میں سے ایک نہ ایک خط لازماً باقی دو خطوں کے مساوی ہوگا یا ان دونوں سے بڑا ہوگا۔ فرض کرو اس خط کا طول ل ہے، تب باقی دو خطوں کی بابت ہم صرف یہ کہہ سکتے ہیں کہ ان میں سے ہر ایک کا طول ۰ اور ل کے درمیان واقع ہے۔ اب ہمیں معلوم ہے (دیکھو نتیجہ صریح مثال ۱) کہ اگر دو

خطوں کے طول ۰ اور ل کے درمیان ہوں تو اُن کے حاصل جمع کے ل سے بڑے ہونے کا احتمال ل سے بڑے نہ ہونے کے احتمال کے مساوی ہوتا ہے جس سے جواب مطلوبہ فوراً حاصل ہو جاتا ہے۔

مثال ۳۔ ایک دائرہ کے تین مماس علی الحساب کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ دائرہ مذکور کے ان مماسوں کا اندرونی دائرہ ہونے کے خلاف امکان ۳ : ۱ ہے۔

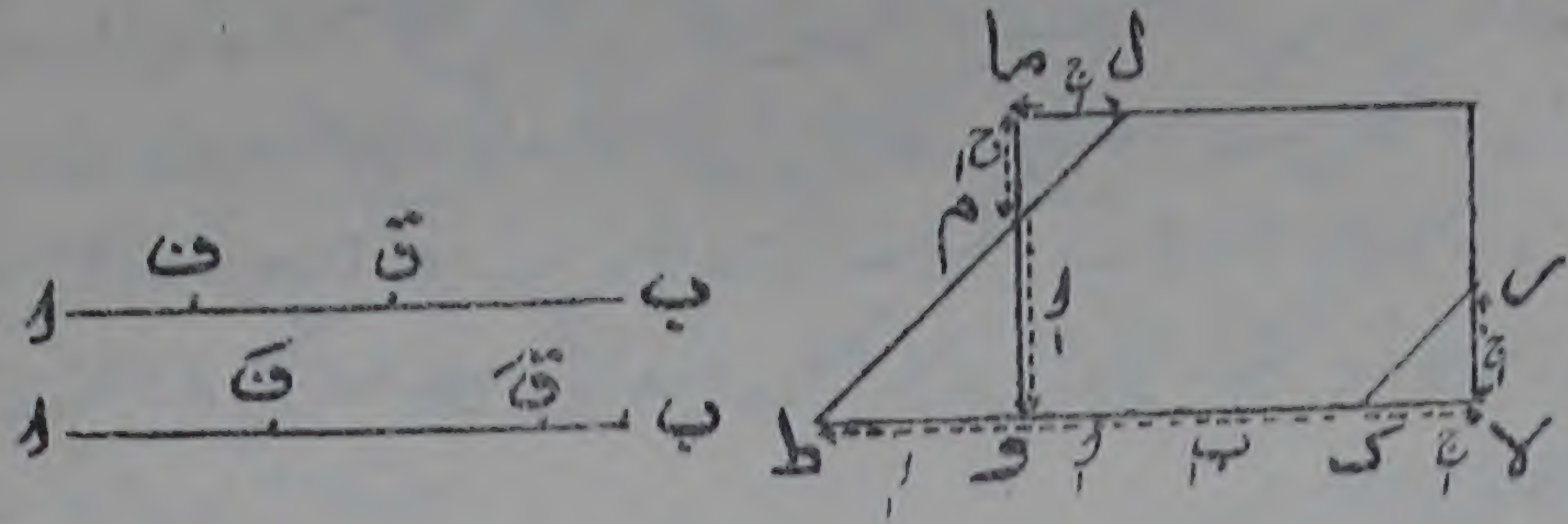
ف

ق | ر/ر

دائرہ کی سطح مستوی میں تین خط ف، ق، ر علی الحساب کھینچو اور ان خطوں کے متوازی دائرہ کے ۶ مماس کھینچو۔
ظاہر ہے کہ اس طرح سے جو ۸ مثلث بنتے ہیں ان میں سے چھ کے لئے دائرہ مذکورہ جانبی دائرہ ہے اور ۲ کیلئے اندرونی دائرہ اور یہ ہر حالت میں درست ہے خواہ ف، ق، ر کی سمتیں کچھ ہی ہوں۔ پس مطلوبہ نتیجہ صاف ظاہر ہے۔

۴۸۲۔ احتمال کے سوالات بعض اوقات ہندسۂ تحلیلی کی مدد سے نہایت آسان ہو جاتے ہیں۔

مثال۔ ایک سلاخ پر سے جس کا طول ا + ب + ج ہے دو طول ا اور ب علی الحساب ناپ لئے گئے ہیں۔ اس امر کا احتمال معلوم کرو کہ ایک طول کا کوئی نقطہ دوسرے طول کے کسی نقطہ پر منطبق نہ ہو۔

فرض کرو کہ خطِ مذکورہ اب ہے،

نیز فرض کرو کہ اف = لا، ف ق = $ا_1$ اور $ا_1$، ف سے ب کی سمت میں ناپا گیا ہے۔ پس لا، $ب_1$ + $ج_1$ کم سے ہوگا،

نیز فرض کرو کہ اَفَ = ما، فَ قَ = $ب_1$ اور فَ قَ، فَ سے ب کی سمت میں ناپا گیا ہے، تب ما کم ہوگا $ا_1$ + $ج_1$ سے۔

اب موافق صورتوں میں اقَ > اق یا اف > اقَ

لہٰذا ما > $ا_1$ + لا یا لا > $ب_1$ + ما ...... (۱)

لیکن سب ممکن صورتوں میں لا > ۰ اور < $ب_1$ + $ج_1$

ما > ۰ اور < $ا_1$ + $ج_1$ ...(۲)

دو علی القوائم محاور لو، و لا کو $ب_1$ + $ج_1$ کے مساوی بناؤ اور و ما کو $ا_1$ + $ج_1$ کے مساوی بناؤ۔

خطوط ما = $ا_1$ + لا اور لا = $ب_1$ + ما کھینچو اور ان کو بالترتیب ط م ل اور ک د سے تعبیر کرو۔

تب ما م اور ک لا دونوں $ج_1$ کے مساوی ہیں اور و م، و ط دونوں $ا_1$ کے مساوی ہیں۔

شرائط (۱) صرف مثلثات م ما ل اور ک لا د کے نقطوں سے

پُوری ہوتی ہیں، اور شرائط (۲) مستطیل و ۷ × و ما کے اندر کے نقطوں سے پوری ہوتی ہیں۔

$$\therefore \text{مطلوبہ احتمال} = \frac{\text{ج}_1^2}{(\text{ا}_1 + \text{ج}_1)(\text{ب}_1 + \text{ج}_1)}$$

۴۸۴۔ اب ہم چند متفرق مثالیں درج کر کے اس باب کو ختم کرتے ہیں۔

مثال ۱۔ ایک صندوق م مساوی خانوں میں تقسیم کیا گیا ہے، اور ان میں ن گیند علی الحساب ڈالے گئے ہیں۔ اس کا کیا احتمال ہے کہ ف خانوں میں سے ہر ایک میں ا گیند ہوں، ق خانوں میں سے ہر ایک میں ب گیند، ر خانوں میں سے ہر ایک میں ج گیند ہوں اور علیٰ ہذا القیاس، جہاں

$$\text{ف ا} + \text{ق ب} + \text{ر ج} + \ldots\ldots = \text{ن}$$

چونکہ ن گیندوں میں سے کوئی گیند م خانوں میں سے کسی خانے میں پڑ سکتا ہے اس لئے کل صورتوں کی تعداد جو واقع ہو سکتی ہیں $\text{م}^{\text{ن}}$ ہے اور ان سب کا امکان مساوی ہے۔ موافق صورتوں کی تعداد معلوم کرنے کے لئے ہمیں یہ دیکھنا چاہیے کہ کتنے طریقوں سے ن گیند ف، ق، ر..... ایسے جٹوں میں تقسیم ہو سکتے ہیں جن میں بالترتیب ا، ب، ج، ..... گیند ہوں۔

پہلے کوئی س خانے منتخب کرو جہاں س، ف + ق + ر + ... کو تعبیر کرتا ہے، ان مختلف طریقوں کی تعداد جن سے یہ عمل کیا جا سکتا ہے

$$\frac{\underline{|\text{م}}}{\underline{|\text{س}}\ \underline{|\text{م} - \text{س}}} \ldots\ldots (1)$$ ہے۔

پھر ان س خانوں کو ایسے جٹوں میں تقسیم کرو کہ ان میں خانوں

کی تعداد بالترتیب ف، ق، ر ..... ہو، دفعہ ۲۷۱ کی رو سے جن مختلف طریقوں سے یہ عمل کیا جاسکتا ہے، اِن کی تعداد

$$\frac{\lfloor\text{س}}{\lfloor\text{ف}\ \lfloor\text{ق}\ \lfloor\text{ر}\ \ldots} \text{ ہے } \ldots\ldots (۲)$$

آخرکار ت گیندوں کو اِن خانوں میں اس طرح تقسیم کرو کہ ف خانوں والے جُٹ کے ہر ایک خانے میں ا گیند ہوں، ق خانوں والے جُٹ کے ہر ایک خانہ میں ب گیند ہوں، ر خانوں والے جُٹ کے ہر ایک خانہ میں ج، وغیرہ وغیرہ، اُن مختلف طریقوں کی تعداد جن سے یہ عمل کیا جاسکتا ہے

$$\frac{\lfloor\text{ن}}{(\lfloor\text{ا})^{\text{ف}}\ (\lfloor\text{ب})^{\text{ق}}\ (\lfloor\text{ج})^{\text{ر}}\ \ldots} \text{ ہے } \ldots\ldots (۳)$$

پس اُن طریقوں کی تعداد جن سے حسب شرائط مذکورۂ بالا یہ گیند ترتیب دئے جاسکتے ہیں جملات (۱)، (۲) اور (۳) کے حاصل ضرب سے تعبیر ہوتی ہے۔ لہذا مطلوبہ احتمال یہ ہے:-

$$\frac{\lfloor\text{م}\ \lfloor\text{ن}}{\text{م}^{\text{ن}}\ (\lfloor\text{ا})^{\text{ف}}\ (\lfloor\text{ب})^{\text{ق}}\ (\lfloor\text{ج})^{\text{ر}} \ldots \lfloor\text{ف}\ \lfloor\text{ق}\ \lfloor\text{ر} \ldots \lfloor\text{م-ف-ق-ر} \ldots}$$

مثال ۲- ایک تھیلی میں ن گیند ہیں۔ یکے بعد دیگرے ک مرتبہ ایک ایک گیند نکالا گیا ہے اور ہر دفعہ سفید گیند برآمد ہوتا ہے، اگر (۱) گیند نکال کر ہر دفعہ واپس رکھے جائیں (۲) اگر واپس نہ رکھے جائیں تو بتاؤ کہ پھر ایک گیند نکلنے پر سفید گیند نکلنے کا کیا احتمال ہے۔

(۱) مشاہدہ کردہ واقعہ سے قبل مساوی امکان کے (ن + ۱) مفروضات ہیں کیونکہ تھیلی میں ۰، ۱، ۲، ۳، .....، ن سفید گیند ہوسکتے ہیں۔

لہذا دفعہ ۴۷۱ کے طریقِ کتابت کے موافق

$$ق' = ق_۱ = ق'_۲ = ق_۳ = \dots = ق_ن$$

اور $ق'_۰ = ۰$، $ق'_۱ = \left(\frac{۱}{ن}\right)^{ک}$، $ق'_۲ = \left(\frac{۲}{ن}\right)^{ک}$، $ق'_۳ = \left(\frac{۳}{ن}\right)^{ک} \dots\dots$

$$\dots\dots ق'_ن = \left(\frac{ن}{ن}\right)^{ک}$$

پس مشاہدہ کردہ واقعہ کے بعد

$$ف_ر = \frac{ر^{ک}}{۱^{ک} + ۲^{ک} + ۳^{ک} + \dots + ن^{ک}}$$

اب اگلی مرتبہ نکالنے سے سفید گیند کے نکلنے کا احتمال $= \sum \frac{ر}{ن} ف_ر$

پس مطلوبہ احتمال $= \frac{۱}{ن} \cdot \frac{۱^{ک+۱} + ۲^{ک+۱} + ۳^{ک+۱} + \dots\dots + ن^{ک+۱}}{۱^{ک} + ۲^{ک} + ۳^{ک} + \dots\dots + ن^{ک}}$

اور شمار کنندہ اور نسب نما کی قیمتیں دفعہ ۴۰۵ کی رُو سے نکل سکتی ہیں
اگر خاص صورت میں ک = ۲ تو

مطلوبہ احتمال $= \frac{۱}{ن}\left\{\frac{ن(ن+۱)}{۲}\right\}^{۲} \div \frac{ن(ن+۱)(۲ن+۱)}{۶}$

$$= \frac{۳(ن+۱)}{۲(۲ن+۱)}$$

اگر ن لاانتہا بڑا ہو تو مطلوبہ احتمال $= \lim_{ن \to \infty} \frac{۱}{ن} \frac{ن^{ک+۲}}{ک+۲} \div \frac{ن^{ک+۱}}{ک+۱}$

یعنی $= \frac{ک+۱}{ک+۲}$

(۲) اگر گیند واپس نہ رکھے جائیں تو

$$ق_ر = \frac{ر}{ن} \times \frac{ر-۱}{ن-۱} \times \frac{ر-۲}{ن-۲} \cdots \frac{ر-ک+۱}{ن-ک+۱}$$

$$\text{اور } ف_ر = \frac{ق_ر}{\sum_{ر=۰}^{ر=ن} ق_ر} = \frac{(ر-ک+۱)(ر-ک+۲)\cdots(ر-۱)ر}{\sum_{ر=۰}^{ر=ن}(ر-ک+۱)(ر-ک+۲)\cdots(ر-۱)ر}$$

$$= (ک+۱)\frac{(ر-ک+۱)(ر-ک+۲)\cdots(ر-۱)ر}{(ن-ک+۱)(ن-ک+۲)\cdots(ن-۱)ن(ن+۱)} \cdots\cdots$$

(دفعہ ۳۹۴)

$$\text{اگلے گیند کے سفید ہونے کا احتمال} = \sum_{ر=۰}^{ر=ن} \frac{ر-ک}{ن-ک} ف_ر$$

$$= \frac{ک+۱}{(ن-ک)(ن-ک+۱)\cdots ن(ن+۱)} \sum_{ر=۰}^{ر=ن} (ر-ک)(ر-ک+۱)\cdots\cdots(ر-۱)ر$$

$$= \frac{ک+۱}{(ن-ک)(ن-ک+۱)\cdots ن(ن+۱)} \times \frac{(ن-ک)(ن-ک+۱)\cdots ن(ن+۱)}{ک+۲}$$

$$= \frac{ک+۱}{ک+۲}$$

جو تھیلی کے ابتدائی گیندوں کی تعداد کے تابع نہیں۔

مثال ۳۔ ایک شخص نے ن خط لکھے اور ان کے پتوں کے ن لفافے۔ اگر وہ خطوطِ مذکورہ کو ان لفافوں میں علی الحساب ڈال دے تو ہر ایک خط کے غلط لفافہ میں ڈالے جانے کا کیا احتمال ہے۔

فرض کرو کہ ع‌ن اُن طریقوں کی تعداد کو تعبیر کرتا ہے جن میں سب خط غلط لفافوں میں پڑ سکتے ہیں۔ نیز فرض کرو کہ جب سب خط

اپنے اپنے لفافوں میں ہوں تو اِن کی ترتیب ا ب ج د .... سے تعبیر
ہوتی ہے۔ اب اگر ا کسی اور ترتیب میں کسی مخصوص حرف ب کی
جگہ لے لے تو ب یا ا کی جگہ لیگا یا کسی دوسرے حرف کی جگہ۔

(۱) فرض کرو کہ ب، ا کی جگہ لے لیتا ہے، تب اُن طریقوں کی
تعداد جن سے باقی سب ن - ۲ خط اپنی جگہ سے ہٹ سکتے ہیں
$ع_{ن-۲}$ ہے، اس لئے جن مختلف طریقوں سے ا باقی ن - ۱ لفافوں
میں سے کسی ایک کے ساتھ تبادلہ کرنے سے ہٹ سکتا ہے جبکہ
باقی سب حروف بھی ساتھ ہی اپنی جگہ سے ہٹے ہوئے ہوں اُن
کی تعداد (ن - ۱) $ع_{ن-۲}$ ہے۔

(۲) فرض کرو کہ ا، ب کی جگہ لے لیتا ہے اور ب، ا کی جگہ
نہیں لیتا۔ تب چونکہ ا، ب کی جگہ پر قائم ہے اس لئے اُن
ترتیبوں میں جو مطلوبہ شرائط کو پورا کرتی ہیں خطوط ب، ج، د....
سب کے سب جگہ بدلیں گے۔ یہ عمل $ع_{ن-۱}$ طریقوں سے ہوسکتا ہے
پس اُن طریقوں کی تعداد جن میں ا کسی دوسرے خط کی جگہ لیتا
ہے لیکن وہ خط ا کی جگہ نہیں لیتا (ن - ۱) $ع_{ن-۱}$ ہے۔

$$\therefore ع_{ن} = (ن-۱)(ع_{ن-۱} + ع_{ن-۲})$$

اس سے دفعہ ۴۴۴ کی مدد سے ہم معلوم کرسکتے ہیں کہ

$$ع_{ن} - ن\,ع_{ن-۱} = (-۱)^{ن}(ع_{۲} - ع_{۱})$$

نیز $ع_{۱} = ۰$، $ع_{۲} = ۱$، اس لئے بالآخر ہمیں حاصل ہوتا ہے:-

$$ع_{ن} = \underline{|ن}\left\{\frac{۱}{\underline{|۲}} - \frac{۱}{\underline{|۳}} + \frac{۱}{\underline{|۴}} - \cdots + \frac{(-۱)^{ن}}{\underline{|ن}}\right\}$$

اب اُن کُل طریقوں کی تعداد جن میں ن چیزیں ن جگہوں پر
رکھی جاسکتی ہیں $\underline{|ن}$ ہے، اسلئے مطلوبہ احتمال

$\frac{1}{\lfloor 2} - \frac{1}{\lfloor 3} + \frac{1}{\lfloor 4} - \cdots\cdots + \frac{(-1)^{ن}}{\lfloor ن}$ ہے۔

جو مسئلہ ہم نے اوپر ثابت کیا ہے وہ نہایت ضروری اور دلچسپ ہے اور اپنی کثیر التعداد شکلوں میں سے کسی نہ کسی میں نظریۂ احتمال کی سب کتب میں پایا جاتا ہے۔ اس پر پہلے پہل مانٹ مارٹ نے بحث کی اور بعد ازاں ڈی مائیور نے، آئیلر اور لاپلاس نے اس کو عمومیت کا جامہ پہنایا۔

۴۸۴۔ احتمال کا مضمون اس قدر وسیع اور بسیط ہے کہ اسکے مشہور مشہور جبریہ طریقوں کا محض خاکہ کھینچنے کی یہاں کوشش کی گئی ہے اس سے زیادہ بحث کی اس جگہ گنجائش نہیں۔ اسکے متعلق ہر ایک جبریہ عمل کی توضیح کے لئے مختلف مسائل کا ایک بیش بہا گلدستہ وٹ ورتھ کے چائس اور چانس میں مل سکتا ہے۔ جو طالب علم احصائے تکملات سے واقف ہے اسے چاہئے کہ انسائکلوپیڈیا برٹینیکا میں پروفیسر کرافٹن نے جو مضمون احتمال کے متعلق لکھا ہے اس کا مطالعہ کرے۔ اس مضمون کی ابتدا اور مسلسل نشو و نما کے متعلق ملاحظہ ہو ٹاڈھنٹر کی تاریخ نظریہ پاسکل کے زمانہ سے لاپلاس کے وقت تک۔

تجارتی لین دین میں احتمال کے نظریہ کے عملی فائدہ پر بحث کرنا اس ابتدائی کتاب کی حدود سے باہر ہے۔ اس امر کے لئے طالب علم انسائکلوپیڈیا برٹینیکا میں اینوٹیٹیز[ل] اور انشیورنس کا مطالعہ کرے۔

امثلہ نمبری ۳۲ (ل)

۱۔ دو مہروں کی ایک ہی افتاد سے کم از کم ۷ نکلنے کے موافق کیا احتمال ہے۔

ل Annuiteis

۲۔ ایک بٹوے میں ۵ پونڈ ہیں اور ۴ شلنگ۔ ان کے متبادلاً پونڈ اور شلنگ نکلنے کا کیا احتمال ہے جبکہ ان کو یکے بعد دیگرے نکالا جائے اور پہلے پونڈ نکلے۔

۳۔ اگر ۱۰ جہازوں میں سے ۹ جہاز بالاوسط بندرگاہ تک صحیح سلامت پہنچ جاتے ہوں تو بتاؤ کہ پانچ جہازوں میں سے کم از کم تین جہازوں کے صحیح سلامت پہنچ جانے کا کیا احتمال ہے۔

۴۔ ایک قرعہ میں سوائے ایک ٹکٹ کے باقی سب ٹکٹ خالی ہیں، ہر ایک آدمی ایک ٹکٹ نکالتا ہے اور اپنے پاس رکھ لیتا ہے، ثابت کرو کہ ہر ایک آدمی کے انعام جیتنے کا احتمال مساوی ہے۔

۵۔ ایک تھیلی میں ۵ سفید اور ۳ سرخ گیند ہیں اور ایک اور تھیلی میں ۴ سفید اور ۵ سرخ گیند ہیں۔ کسی ایک تھیلی میں سے علی الحساب دو گیند نکالے گئے ہیں۔ ان گیندوں کے مختلف رنگوں کے ہونے کا احتمال دریافت کرو۔

۶۔ پانچ اشخاص ا، ب، ج، د، ع ترتیب وار ایک مہرہ پھینکتے ہیں حتیٰ کہ ان میں سے کوئی ایک یکہ پھینک سکے۔ یہ فرض کرتے کہ وہ مہرہ کو پھینکتے رہیں گے تاوقتیکہ یکہ نکل آئے ان کے اضافی احتمال معلوم کرو۔

۷۔ شطرنج کے ایک تختہ پر کے تین خانے علی الحساب منتخب کئے گئے ہیں ان میں سے دو خانوں کے ایک رنگ کے اور ایک کے دوسرے رنگ کے ہونے کا احتمال دریافت کرو۔

۸۔ ایک شخص دو مہرے پھینکتا ہے۔ ایک مہرہ معمولی مکعب ہے اور دوسرا منتظم ذوار بعتہ السطوح، ذوار بعتہ السطوح کی صورت میں نچلے رخ کا عدد لیا جاتا ہے، ایک انداخت کی اوسط قیمت معلوم کرو اور ۵، ۶، ۷ پھینکنے کے احتمال محسوب کرو۔

۹۔ ا کی مہارت کی نسبت ب کی مہارت کے ساتھ ۱ : ۲ ہے

اور ج کی مہارت کے ساتھ ۳ : ۲ اور د کے ساتھ ۴ : ۳ - بتاؤ کہ اگر ا، باقی تینوں اشخاص ب، ج، د میں سے ہر ایک کے مقابلہ میں مہرہ پھینکے تو اس کے کم از کم دو مرتبہ جیتنے کا کیا احتمال ہے۔

۱۰- چار آدمی بالترتیب ایک ہشت سطحی مہرہ کو اس شرط پر پھینکتے ہیں کہ انعام اس کو ملے جو اول مرتبہ یکہ پھینکے بتاؤ کہ آخری آدمی کے جیتنے کا کیا احتمال ہے۔

۱۱- مساوی مہارت کے دو کھلاڑی ا اور ب کھیلوں کی ایک بازی کھیلتے ہیں ا کو بازی جیتنے کے لئے دو کھیلوں کی ضرورت ہے اور ب کو تین کی۔ ان کے جیتنے کے احتمال کا مقابلہ کرو۔

۱۲- ایک بٹوے میں تین پونڈ ہیں اور ۲ شلنگ۔ ایک شخص دونوں ہاتھوں سے ایک ایک سکّہ نکالتا ہے۔ پھر ایک سکّہ کو دیکھتا ہے کہ وہ پونڈ ہے، بتاؤ کہ دوسرے ہاتھ میں کے سکے کے پونڈ اور شلنگ ہونے کا مساوی امکان ہے۔

۱۳- ا اور ب ایک انعام کو جیتنے کے لئے ایک مہرہ پھینکتے ہیں، پہلے ا اس شرط پر پھینکتا ہے کہ اگر وہ ۶ پھینک سکے تو وہ جیت جائیگا۔ اگر ا ناکام رہے تو پھر ب پھینکے اور اگر ب ۶ یا ۵ پھینک سکے تو وہ جیت جائیگا۔ اگر وہ بھی ناکام رہے تو پھر ا پھینکے اور اگر ا، ۶، ۵ یا ۴ پھینک سکے تو ا جیت جائے۔ علیٰ ہذا القیاس ہر ایک کھلاڑی کے جیتنے کا احتمال دریافت کرو۔

۱۴- ایک ریل گاڑی کے درجۂ اول کے خانہ کی چھ نشستوں کو حاصل کرنے کے لئے سات آدمی قرعہ ڈالتے ہیں، ان میں سے (۱) دو مخصوص اشخاص کے مقابل کی نشستوں کے حاصل کرنے کے اور (۲) ایک ہی جانب کی دو متصل نشستوں کے حاصل کرنے کے احتمال محسوب کرو۔

۱۵- ایک عدد میں ۷ ہندسے ہیں جن کا حاصل جمع ۵۹ ہے ثابت کرو کہ اس عدد کے ۱۱ پر تقسیم ہو سکنے کا احتمال $\frac{۴}{۲۱}$ ہے۔

۱۶ — تین مُہروں کو ایک ساتھ پھینکنے سے ۱۲ نکلنے کا کیا احتمال ہے۔

۱۷ — ایک تھیلی میں ۷ ٹکٹ ہیں اور اُن پر بالترتیب اعداد ۰، ۱، ۲، .....۶ لکھے ہیں، ایک ٹکٹ کو نکال کر واپس رکھ دیا گیا ہے۔ بتاؤ کہ اِس طرح چار ٹکٹ نکالنے سے جو عدد برآمد ہوں اُن کے حاصل جمع کے ۸ ہونے کا کیا احتمال ہے؟

۱۸ — ۱۰ ٹکٹوں میں ۵ ٹکٹ خالی ہیں اور باقی پانچ پر اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ لکھے ہیں۔ تین بار ایک ایک ٹکٹ نکال کر ۱۰ بنا لینے کا کیا احتمال ہے۔ جبکہ (۱) ہر دفعہ ٹکٹ واپس رکھ دئے جائیں (۲) ٹکٹ واپس نہ رکھے جائیں۔

۱۹ — اگر ن صحیح عددوں کو علی الحساب لیکر ضرب دیا جائے تو ثابت کرو کہ حاصل ضرب کے آخری عدد کے ۱، ۳، ۷ یا ۹، ہونے کا احتمال $\frac{۲^ن}{۵^ن}$ ہے، ۲، ۴، ۶ یا ۸ ہونے کا احتمال $\frac{۴^ن - ۲^ن}{۵^ن}$ ہے، ۵ ہونے کا احتمال $\frac{۵^ن - ۴^ن}{۱۰^ن}$ ہے اور ۰ ہونے کا احتمال $\frac{۱۰^ن - ۸^ن - ۵^ن + ۴^ن}{۱۰^ن}$ ہے۔

۲۰ — ایک بٹوے میں ۲ پونڈ اور ۲ شلنگ ہیں اور ایک اور سکّہ اسی شکل و قامت کا کسی دوسری دھات کا ہے ایک آدمی ایک وقت ایک سکہ نکالتا ہے تا وقتیکہ وہ کھوٹا سکہ نہ نکال لے اس کی توقع کی قیمت معلوم کرو۔

۲۱ — تین اشخاص ا، ب اور ج اسی ترتیب سے تین مُہرے ایک ساتھ اس شرط پر پھینکتے ہیں کہ جو شخص پہلے ۱۰ پھینک دے اِس کو ایک خاص رقم انعام دی جائے گی۔ اگر وہ اسی ترتیب سے پھینکتے جائیں جب تک کہ شرط مذکور پوری نہ ہو جائے تو ثابت کرو کہ اُن کے احتمال بالترتیب

$$\left(\frac{۸}{۱۳}\right)^۲ ، \frac{۵۶}{۱۳^۲} \text{ اور } \left(\frac{۷}{۱۳}\right)^۲$$ ہیں۔

۲۲ — دو اشخاص جن کے سچ بولنے کے احتمال بالترتیب $\frac{۲}{۳}$ اور $\frac{۵}{۶}$ ہیں متفقہ طور پر یہ بیان کرتے ہیں کہ ایک تھیلی میں سے جس میں ۱۵ ٹکٹ ہیں ایک مخصوص ٹکٹ نکالا گیا ہے اِس بیان کی صداقت کا احتمال معلوم کرو۔

۲۳۔ ایک تھیلی میں $\frac{ن (ن + ۱)}{۲}$ مُہرے ہیں، اُن میں سے ایک مہرہ پر ۱، دو پر ۴ اور تین پر ۹ لکھا ہے اور علیٰ ہذا القیاس۔ ایک آدمی تھیلی میں سے ایک مُہرہ اِس شرط پر نکالتا ہے کہ جو عدد اُس مُہرے پر ہو اُس کو اُتنے ہی شلنگ دے لئے جائیں۔ اِس آدمی کی توقع کی قیمت معلوم کرو۔

۲۴ — اگر ۱۰ چیزیں تین شخصوں میں تقسیم کی جائیں تو ثابت کرو کہ ایک خاص آدمی کے ۵ سے زیادہ چیزیں لینے کا احتمال $\frac{۱۵۰۷}{۱۹۶۸۳}$ ہے۔

۲۵ — ایک سلاخ پر علی الحساب ن نشان لگا کر سلاخ کو اِن نشانات سے حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔

ثابت کرو کہ اِن حصوں میں سے ہر ایک حصہ کے سلاخ کے $\frac{۱}{ن}$ ویں حصے سے بڑے نہ ہونے کا احتمال $\frac{۱}{ن^ن}$ ہے۔

۲۶ — دو بٹوؤں میں سے ایک میں تین پونڈ اور ایک شلنگ ہے اور دُوسرے میں ۳ شلنگ اور ایک پونڈ۔ ایک غیر معیّن بٹوے میں سے ایک سکّہ نکال کر دوسرے میں ڈال دیا گیا ہے۔ پھر دونوں بٹوؤں میں سے ایک ایک سکّہ نکال کر دیکھا گیا ہے کہ یہ دونوں شلنگ ہیں۔ اگر پھر دونوں بٹوؤں میں سے ایک ایک سکّہ اور نکالا جائے تو اِن دونوں سکّوں کے شلنگ ہونے کے خلاف کیا امکان ہے۔

۲۷ — ایک دائرہ کے محیط پر علی الحساب تین نقطے لیکر اُن کو ملانے سے ایک مثلث بنایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اِس مثلث کے سب زاویوں کے حادہ

ہونے کے خلاف امکان ۳:۱ ہے۔

۲۸ — ایک دائرہ کے محیط پر تین نقطے علی الحساب لئے گئے ہیں، بتاؤ کہ اِس طرح سے جو تین قوسیں حاصل ہوں اُن میں سے کسی دو قوسوں کے ملکر تیسری قوس سے بڑے ہونے کا کیا احتمال ہے۔

۲۹ — ایک خط کو علی الحساب تین حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے اِن حصوں سے ایک مثلث بن سکنے کا کیا احتمال ہے۔

۳۰ — ایک بٹوے میں ۲۵ پونڈ ہیں اور دوسرے بٹوے میں ۱۰ پونڈ اور ۱۵ شلنگ۔ ایک بٹوے کو علی الحساب منتخب کرکے اِس میں سے ۵ سکے نکالے گئے ہیں اور سب کے سب پونڈ ہیں۔ اِس بٹوے کے صرف پونڈوں والا بٹوا ہونے کا کیا احتمال ہے اور اگر اِس بٹوے میں سے ایک اَور سکہ نکالا جائے تو اِس کی توقعی قیمت کیا ہے۔

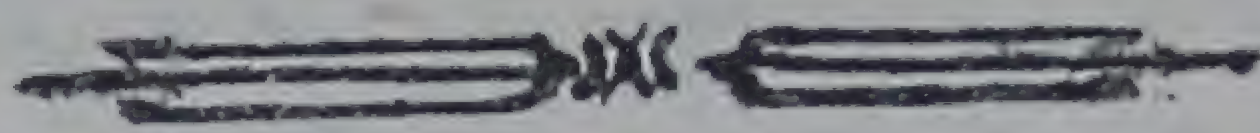
۳۱ — ایک خطِ مستقیم کا طول ا ہے اِس پر دو نقطے علی الحساب لئے گئے ہیں اِن نقطوں کے درمیانی فاصلہ کے ب سے بڑے ہونے کا کیا احتمال ہے۔

۳۲ — ایک خطِ مستقیم کا طول ا ہے، اِس پر علی الحساب دو نقطے لیکر اِس کو تین حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ اِس کا احتمال معلوم کرو کہ کوئی حصہ ب سے بڑا نہ ہو۔

۳۳ — ایک خطِ مستقیم کا طول ا + ب ہے، اِس پر دو طول ا اور ب علی الحساب ناپے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ اِن طولوں کے مشترک حصہ کے ج سے زیادہ نہ ہونے کا احتمال $\frac{ج^2}{اب}$ ہے جہاں ج کم ہے ا یا ب سے۔ نیز بتاؤ کہ چھوٹے طول ب کے بڑے طول ا کے کلّی طور پر اندر آنے کا احتمال $\frac{ا - ب}{ا}$ ہے۔

۳۴ — ایک خطِ مستقیم کا طول ا + ب + ج ہے، اِس پر علی الحساب دو طول ا اور ب ناپے گئے ہیں۔ اِن کے مشترک حصے کے د سے

زیادہ نہ ہونے کا احتمال $\frac{(ج + د)^2}{(ج + ا)(ج + ب)}$ ہے جہاں د، ا یا ب سے کم ہے۔

۳۵۔ ایک یورپین ریلوے میں درجہ اول کے ل خانے ہیں، درجہ دوم کے م اور درجہ سوم کے ن۔ اس گاڑی میں دو مرد ا اور ب اور دو عورتیں ج اور د سفر کر رہے ہیں جو سب ایک دوسرے سے ناواقف ہیں۔ ا اور ب کے سوار ہونے سے قبل درجہ اوّل، درجہ دوم اور درجہ سوم میں سفر کرنے کے احتمال بالترتیب لہ، مہ، نہ، ہیں اور ج اور د کے یہی احتمال بالترتیب ل، م اور ن ہیں، ثابت کرو کہ لہ، مہ، نہ، کی تمام قیمتوں کے واسطے (سوائے اس خاص صورت کے جب کہ لہ : مہ : نہ = ل : م : ن) ا اور ب کے ایک ہی عورت کی رفاقت میں ہونے کا احتمال الگ الگ عورتوں کی رفاقت میں ہونے کے احتمال سے مقابلۃً زیادہ ہے ۔

تینتیسواں باب

مقطعات

۴۸۵ — باب ہذا میں ہم مقطعات اور اُن کے ابتدائی خواص پر اجمالی بحث کرینگے۔ اِس مختصر بیان سے طالب علم ہندسۂ تحلیلی اور نیز علم ریاضی کے دیگر اعلےٰ شعبوں میں مقطعات کی ترقیم سے مستفید ہونے کے قابل ہو جائے گا۔ شعبۂ تحلیل کی اِس شاخ کے متعلق زیادہ مفصل اور موضح معلومات ڈاکٹر سالمن کی کتاب اعلےٰ جبر و مقابلہ جدید کے ابتدائی اسباق
(Lessons Introductory tomodern Higher algebra)
سے اور نیز موئر[1] کے نظریۂ مقطعات (Theory of Determinants)
سے حاصل کئے جا سکتے ہیں۔

۴۸۶ — دو متجانس خطی مساواتوں

$$ا_1 لا + ب_1 ما = ۰$$

$$ا_2 لا + ب_2 ما = ۰$$

پر غور کرو۔ پہلی مساوات کو $ب_2$ سے اور دُوسری کو $ب_1$ سے ضرب دو۔ پھر تفریق کرکے حاصل تفریق کو لا پر تقسیم کرو، ایسا کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

$$ا_1 ب_2 - ا_2 ب_1 = ۰$$

Muir ے

اِس نتیجہ کو بعض اوقات شکل

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 \end{vmatrix} = ۰$$

میں لکھتے ہیں۔ دائیں طرف کا جملہ مقطعہ کہلاتا ہے، اِس میں دو قطاریں اور دو ستون ہیں۔ اِس کی تفصیل میں ہر ایک رقم دو مقادیر کا حاصلِ ضرب ہے۔ اِس لحاظ سے مندرجۂ بالا مقطعہ کو دوسرے رتبہ کا مقطعہ کہتے ہیں۔

حروف ا_1، ب_2، ا_2، ب_1 کو مقطعہ کے اجزائے افرادی کہتے ہیں۔

اور رقوم $\text{ا}_1\text{ب}_2$، $\text{ا}_2\text{ب}_1$ کو اجزائے ترکیبی سے موسوم کرتے ہیں۔

۴۸۷ — چونکہ

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 \end{vmatrix} = \text{ا}_1\text{ب}_2 - \text{ا}_2\text{ب}_1 = \begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ا}_2 \\ \text{ب}_1 & \text{ب}_2 \end{vmatrix}$$

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اس مقطعہ کی قیمت میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی جبکہ اس کی قطاروں کو ستونوں میں اور ستونوں کو قطاروں میں بدل دیا جائے۔

۴۸۸ — یہ آسانی سے دیکھا جاسکتا ہے کہ

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \text{ب}_1 & \text{ا}_1 \\ \text{ب}_2 & \text{ا}_2 \end{vmatrix} \quad \text{اور} \quad \begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \text{ا}_2 & \text{ب}_2 \\ \text{ا}_1 & \text{ب}_1 \end{vmatrix}$$

یعنی اگر ہم ایک مقطعہ کی دو قطاروں یا دو ستونوں کو ایک دوسرے سے بدل دیں تو جو مقطعہ حاصل ہوگا وہ پہلے مقطعہ سے صرف بلحاظ علامت کے مختلف ہوگا۔

۴۸۹ — ذیل کی متجانس خطی مساواتوں پر غور کرو۔

$$\text{ا}_1\text{لا} + \text{ب}_1\text{ما} + \text{ج}_1\text{ی} = ۰$$

$$ا_۲ لا + ب_۲ ما + ج_۲ ی = ۰$$

$$ا_۳ لا + ب_۳ ما + ج_۳ ی = ۰$$

ان میں سے لا، ما، ی کو ساقط کرنے سے حسب دفعہ ۱۶۱ مشق ۲ ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$ا_۱(ب_۲ ج_۳ - ب_۳ ج_۲) + ب_۱(ج_۲ ا_۳ - ج_۳ ا_۲) + ج_۱(ا_۲ ب_۳ - ا_۳ ب_۲) = ۰$$

$$\text{یا}\quad ا_۱ \begin{vmatrix} ب_۲ & ج_۲ \\ ب_۳ & ج_۳ \end{vmatrix} + ب_۱ \begin{vmatrix} ج_۲ & ا_۲ \\ ج_۳ & ا_۳ \end{vmatrix} + ج_۱ \begin{vmatrix} ا_۲ & ب_۲ \\ ا_۳ & ب_۳ \end{vmatrix} = ۰$$

اس مقطعہ کو بالعموم اس شکل میں لکھا جاتا ہے:

$$\begin{vmatrix} ا_۱ & ب_۱ & ج_۱ \\ ا_۲ & ب_۲ & ج_۲ \\ ا_۳ & ب_۳ & ج_۳ \end{vmatrix} = ۰$$

اس میں دائیں طرف کے جملہ کو جو تین قطاروں اور تین ستونوں پر مشتمل ہے تیسرے رتبہ کا مقطعہ کہتے ہیں۔

۴۹۰ — مقطعۂ بالا کی تفصیلی صورت کو اس کی رقوم کی ترتیب کو قدرے بدلنے سے یوں بھی لکھا جا سکتا ہے۔

$$ا_۱(ب_۲ ج_۳ - ب_۳ ج_۲) + ا_۲(ب_۳ ج_۱ - ب_۱ ج_۳)$$
$$+ ا_۳(ب_۱ ج_۲ - ب_۲ ج_۱)$$

$$\text{یا}\quad ا_۱ \begin{vmatrix} ب_۲ & ب_۳ \\ ج_۲ & ج_۳ \end{vmatrix} + ا_۲ \begin{vmatrix} ب_۳ & ب_۱ \\ ج_۳ & ج_۱ \end{vmatrix} + ا_۳ \begin{vmatrix} ب_۱ & ب_۲ \\ ج_۱ & ج_۲ \end{vmatrix}$$

لہذا

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 & \text{ج}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 & \text{ج}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 & \text{ج}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ا}_2 & \text{ا}_3 \\ \text{ب}_1 & \text{ب}_2 & \text{ب}_3 \\ \text{ج}_1 & \text{ج}_2 & \text{ج}_3 \end{vmatrix}$$

یعنی مقطعہ مذکور کی قیمت میں کوئی تبدیلی واقع نہیں ہوتی جبکہ اسکی قطاروں کو ستونوں میں اور ستونوں کو قطاروں میں بدل دیا جائے۔

۴۹۱ــــ دفعۂ ماقبل کی رُو سے

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 & \text{ج}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 & \text{ج}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 & \text{ج}_3 \end{vmatrix} = \text{ا}_1 \begin{vmatrix} \text{ب}_2 & \text{ج}_2 \\ \text{ب}_3 & \text{ج}_3 \end{vmatrix} + \text{ا}_2 \begin{vmatrix} \text{ب}_3 & \text{ج}_3 \\ \text{ب}_1 & \text{ج}_1 \end{vmatrix} + \text{ا}_3 \begin{vmatrix} \text{ب}_1 & \text{ج}_1 \\ \text{ب}_2 & \text{ج}_2 \end{vmatrix}$$

$$= \text{ا}_1 \begin{vmatrix} \text{ب}_2 & \text{ج}_2 \\ \text{ب}_3 & \text{ج}_3 \end{vmatrix} - \text{ا}_2 \begin{vmatrix} \text{ب}_1 & \text{ج}_1 \\ \text{ب}_3 & \text{ج}_3 \end{vmatrix} + \text{ا}_3 \begin{vmatrix} \text{ب}_1 & \text{ج}_1 \\ \text{ب}_2 & \text{ج}_2 \end{vmatrix} \;\ldots\ldots(1)$$

نیز دفعہ ۴۸۹ سے

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 & \text{ج}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 & \text{ج}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 & \text{ج}_3 \end{vmatrix} = \text{ا}_1 \begin{vmatrix} \text{ب}_2 & \text{ج}_2 \\ \text{ب}_3 & \text{ج}_3 \end{vmatrix} - \text{ب}_1 \begin{vmatrix} \text{ا}_2 & \text{ج}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ج}_3 \end{vmatrix} + \text{ج}_1 \begin{vmatrix} \text{ا}_2 & \text{ب}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 \end{vmatrix} \;\text{---}(2)$$

اب ہم ذیل میں تیسرے مرتبہ کے مقطعہ کو پھیلانے کا آسان طریقہ درج کرتے ہیں۔ غور کرنے سے معلوم ہوگا کہ خواہ ہم مقطعہ کو پہلے

ستون سے پھیلائیں یا پہلی قطار سے، ہر دو صورتوں میں وہی جواب حاصل ہوتا ہے۔

مساوات (۱) سے ظاہر ہے کہ اجزائے افرادی ا_1، ا_2، ا_3 میں سے کسی ایک کا سر درجہ دوم کا وہ مقطعہ ہے جو اس جزوِ افرادی میں سے گذرنے والے ستون اور قطار کو نکال دینے سے باقی رہتا ہے، یہ مقطعات ابتدائی مقطعہ کے **صغائر** کہلاتے ہیں اس لحاظ سے مساوات (۱) کی دائیں جانب کے رکن کو اس طرح

$$\text{ا}_1\,\text{اَ}_1 - \text{ا}_2\,\text{اَ}_2 + \text{ا}_3\,\text{اَ}_3$$

کی شکل میں بھی لکھ سکتے ہیں جہاں اَ_1، اَ_2، اَ_3 بالترتیب ا_1، ا_2، ا_3 کے صغائر ہیں۔

نیز مساوات (۲) سے مقطعۂ مذکورہ

$$\text{ا}_1\,\text{اَ}_1 - \text{ب}_1\,\text{بَ}_1 + \text{ج}_1\,\text{جَ}_1$$

کے مساوی ہے جہاں اَ_1، بَ_1، جَ_1 بالترتیب ا_1، ب_1، ج_1 کے صغائر ہیں۔

۴۹۲۔ مقطعہ

$$\begin{vmatrix} \text{ج}_1 & \text{ب}_1 & \text{ا}_1 \\ \text{ج}_2 & \text{ب}_2 & \text{ا}_2 \\ \text{ج}_3 & \text{ب}_3 & \text{ا}_3 \end{vmatrix}$$

$$= \text{ا}_1(\text{ب}_2\text{ج}_3 - \text{ب}_3\text{ج}_2) + \text{ب}_1(\text{ج}_2\text{ا}_3 - \text{ج}_3\text{ا}_2) + \text{ج}_1(\text{ا}_2\text{ب}_3 - \text{ا}_3\text{ب}_2)$$

$$= -\text{ب}_1(\text{ا}_2\text{ج}_3 - \text{ا}_3\text{ج}_2) - \text{ا}_1(\text{ج}_2\text{ب}_3 - \text{ج}_3\text{ب}_2) - \text{ج}_1(\text{ب}_2\text{ا}_3 - \text{ب}_3\text{ا}_2)$$

اس لئے

$$\begin{vmatrix} \text{ج}_1 & \text{ب}_1 & \text{ا}_1 \\ \text{ج}_2 & \text{ب}_2 & \text{ا}_2 \\ \text{ج}_3 & \text{ب}_3 & \text{ا}_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \text{ج}_1 & \text{ا}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{ج}_2 & \text{ا}_2 & \text{ب}_2 \\ \text{ج}_3 & \text{ا}_3 & \text{ب}_3 \end{vmatrix}$$

اِس سے ظاہر ہے کہ اگر دو متصل ستونوں کو یا متصل قطاروں کو باہم بدل دیا جائے تو مقطعہ کی علامت بدل جاتی ہے لیکن عددی قیمت میں کوئی تغیر واقع نہیں ہوتا۔
اگر ہم اختصار کی خاطر مقطعہ

$$\begin{vmatrix} ا_1 & ب_1 & ج_1 \\ ا_2 & ب_2 & ج_2 \\ ا_3 & ب_3 & ج_3 \end{vmatrix}$$

کو $(ا_1 ب_2 ج_3)$ سے تعبیر کریں تو جو نتیجہ ہم نے ابھی حاصل کیا ہے اُس کو یوں بھی لکھا جا سکتا ہے: $(ب_1 ا_2 ج_3) = -(ا_1 ب_2 ج_3)$
اسی طرح سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$(ج_1 ا_2 ب_3) = -(ا_1 ج_2 ب_3) = +(ا_1 ب_2 ج_3)$$

۳۹۴۔ اگر ایک مقطعہ کے دو ستون یا دو قطاریں متماثل ہوں تو مقطعہ صفر ہو جاتا ہے۔
فرض کرو کہ مقطعہ کی قیمت ق ہے، تب دو ستونوں یا دو قطاروں کو باہم بدلنے سے مقطعہ کی قیمت "-ق" ہو جاتی ہے، لیکن ظاہر ہے کہ متماثل قطاروں اور ستونوں کو بدلنے سے مقطعۂ مذکورہ میں کوئی تبدیلی واقع نہیں ہو سکتی، اسلیئے ق = -ق یعنی ق = ۰، پس ہمیں مندرجہ ذیل مساواتیں حاصل ہوئی ہیں:-

$$ا_1 اَ_1 - ا_2 اَ_2 + ا_3 اَ_3 = ق$$

$$ب_1 اَ_1 - ب_2 اَ_2 + ب_3 اَ_3 = 0$$

$$ج_1 اَ_1 - ج_2 اَ_2 + ج_3 اَ_3 = 0$$

۴۹۴ ۔ اگر کسی قطار یا ستون کے ہر ایک جزوِ افرادی کو ایک ہی جزوِ ضربی سے ضرب دیا جائے تو مقطعۂ مذکور اُس جزوِ ضربی سے ضرب کھا جاتا ہے۔

کیونکہ

$$\begin{vmatrix} \text{م}\,\text{ا}_1 & \text{ب}_1 & \text{ج}_1 \\ \text{م}\,\text{ا}_2 & \text{ب}_2 & \text{ج}_2 \\ \text{م}\,\text{ا}_3 & \text{ب}_3 & \text{ج}_3 \end{vmatrix} = \text{م}\,\text{ا}_1 . \text{اَ}_1 - \text{م}\,\text{ا}_2 . \text{اَ}_2 + \text{م}\,\text{ا}_3 . \text{اَ}_3$$

$= \text{م}\,(\text{ا}_1\text{اَ}_1 - \text{ا}_2\text{اَ}_2 + \text{ا}_3\text{اَ}_3)$، لہذا مسئلہ ثابت ہوا۔

نتیجہ صریح ۔ اگر ایک قطار یا ستون کا ہر ایک جزوِ افرادی کسی اور قطار یا ستون کے متناظر جزوِ افرادی کا ایک ہی ضعف ہو تو مقطعہ کی قیمت صفر ہوگی۔

۴۹۵ ۔ اگر ایک مقطعہ کی کسی ایک قطار یا ستون کا ایک جزوِ افرادی دو رقوم پر مشتمل ہو تو مقطعۂ مذکور دو مقطعات کے حاصل جمع کے طور پر لکھا جاتا ہے۔ مثلاً

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1+\text{ع}_1 & \text{ب}_1 & \text{ج}_1 \\ \text{ا}_2+\text{ع}_2 & \text{ب}_2 & \text{ج}_2 \\ \text{ا}_3+\text{ع}_3 & \text{ب}_3 & \text{ج}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 & \text{ج}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 & \text{ج}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 & \text{ج}_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{ع}_1 & \text{ب}_1 & \text{ج}_1 \\ \text{ع}_2 & \text{ب}_2 & \text{ج}_2 \\ \text{ع}_3 & \text{ب}_3 & \text{ج}_3 \end{vmatrix}$$

کیونکہ دائیں طرف کا جملہ

$$= (\text{ا}_1+\text{ع}_1)\,\text{اَ}_1 - (\text{ا}_2+\text{ع}_2)\,\text{اَ}_2 + (\text{ا}_3+\text{ع}_3)\,\text{اَ}_3$$

$$= (\text{ا}_1\text{اَ}_1 - \text{ا}_2\text{اَ}_2 + \text{ا}_3\text{اَ}_3) + (\text{ع}_1\text{اَ}_1 - \text{ع}_2\text{اَ}_2 + \text{ع}_3\text{اَ}_3)$$

پس مسئلہ ثابت ہوا۔

اِسی طرح سے اگر کسی ایک قطار یا ستون کا ہر ایک جزوِ افرادی م رقوم پر مشتمل ہو تو اِس مقطعہ کو م مقطعات کے حاصل جمع ...

طور پر لکھ سکتے ہیں۔

اسی طرح سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1+\text{عہ}_1 & \text{ب}_1+\text{بہ}_1 & \text{ج}_1 \\ \text{ا}_2+\text{عہ}_2 & \text{ب}_2+\text{بہ}_2 & \text{ج}_2 \\ \text{ا}_3+\text{عہ}_3 & \text{ب}_3+\text{بہ}_3 & \text{ج}_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 & \text{ج}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 & \text{ج}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 & \text{ج}_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{بہ}_1 & \text{ج}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{بہ}_2 & \text{ج}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{بہ}_3 & \text{ج}_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{عہ}_1 & \text{ب}_1 & \text{ج}_1 \\ \text{عہ}_2 & \text{ب}_2 & \text{ج}_2 \\ \text{عہ}_3 & \text{ب}_3 & \text{ج}_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{عہ}_1 & \text{بہ}_1 & \text{ج}_1 \\ \text{عہ}_2 & \text{بہ}_2 & \text{ج}_2 \\ \text{عہ}_3 & \text{بہ}_3 & \text{ج}_3 \end{vmatrix}$$

ان نتائج کی تعمیم نہایت آسانی سے کی جا سکتی ہے۔ مثلاً اگر تین ستونوں کے اجزائے افرادی بالترتیب م، ن، ف رقوم پر مشتمل ہوں تو ہم اس مقطعہ کو م ن ف مقطعات کے حاصل جمع کی شکل میں لکھ سکتے ہیں۔

مثال ۱۔ ثابت کرو کہ

$$\begin{vmatrix} \text{ب}+\text{ج} & \text{ا}-\text{ب} & \text{ا} \\ \text{ج}+\text{ا} & \text{ب}-\text{ج} & \text{ب} \\ \text{ا}+\text{ب} & \text{ج}-\text{ا} & \text{ج} \end{vmatrix} = 3\,\text{ا ب ج} - \text{ا}^3 - \text{ب}^3 - \text{ج}^3$$

مذکورۂ بالا مقطعہ

$$= \begin{vmatrix} \text{ب} & \text{ا} & \text{ا} \\ \text{ج} & \text{ب} & \text{ب} \\ \text{ا} & \text{ج} & \text{ج} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \text{ب} & \text{ب} & \text{ا} \\ \text{ج} & \text{ج} & \text{ب} \\ \text{ا} & \text{ا} & \text{ج} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{ج} & \text{ا} & \text{ا} \\ \text{ا} & \text{ب} & \text{ب} \\ \text{ب} & \text{ج} & \text{ج} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \text{ج} & \text{ب} & \text{ا} \\ \text{ا} & \text{ج} & \text{ب} \\ \text{ب} & \text{ا} & \text{ج} \end{vmatrix}$$

ان چار مقطعات میں سے پہلے تین معدوم ہو جاتے ہیں اور مقطعہ زیرِ بحث ان میں سے صرف آخری مقطعہ کے مساوی رہ جاتا ہے۔ لہٰذا اس کی قیمت

$$= -\{\text{ج}(\text{ج}^2 - \text{ا ب}) - \text{ب}(\text{ا ج} - \text{ب}^2) + \text{ا}(\text{ا}^2 - \text{ب ج})\}$$

$$= 3\,\text{ا ب ج} - \text{ا}^3 - \text{ب}^3 - \text{ج}^3$$

مثال ۲- $\begin{vmatrix} 67 & 19 & 21 \\ 39 & 13 & 14 \\ 81 & 24 & 26 \end{vmatrix}$ کی قیمت معلوم کرو -

یہاں

$$\begin{vmatrix} 67 & 19 & 21 \\ 39 & 13 & 14 \\ 81 & 24 & 26 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10+57 & 19 & 21 \\ 0+39 & 13 & 14 \\ 9+72 & 24 & 26 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 19 & 21 \\ 0 & 13 & 14 \\ 9 & 24 & 26 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 57 & 19 & 21 \\ 39 & 13 & 14 \\ 72 & 24 & 26 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 19 & 21 \\ 0 & 13 & 14 \\ 9 & 24 & 26 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 19 & 19+2 \\ 0 & 13 & 13+1 \\ 9 & 24 & 24+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 19 & 2 \\ 0 & 13 & 1 \\ 9 & 24 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 10 \begin{vmatrix} 13 & 1 \\ 24 & 2 \end{vmatrix} + 9 \begin{vmatrix} 19 & 2 \\ 13 & 1 \end{vmatrix} = 20 - 63 = -43$$

۴۹۶- ذیل کے مقطعہ پر غور کرو:

$$\begin{vmatrix} ا_1 + ف\,ب_1 + ق\,ج_1 & ب_1 & ج_1 \\ ا_2 + ف\,ب_2 + ق\,ج_2 & ب_2 & ج_2 \\ ا_3 + ف\,ب_3 + ق\,ج_3 & ب_3 & ج_3 \end{vmatrix}$$

دفعۂ ماقبل کی طرح ہم بتا سکتے ہیں کہ یہ ذیل کے تین مقطعات

$$\begin{vmatrix} ا_1 & ب_1 & ج_1 \\ ا_2 & ب_2 & ج_2 \\ ا_3 & ب_3 & ج_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ف\,ب_1 & ب_1 & ج_1 \\ ف\,ب_2 & ب_2 & ج_2 \\ ف\,ب_3 & ب_3 & ج_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ق\,ج_1 & ب_1 & ج_1 \\ ق\,ج_2 & ب_2 & ج_2 \\ ق\,ج_3 & ب_3 & ج_3 \end{vmatrix}$$

کے مساوی ہے- اِن میں سے آخر کے دو مقطعات حسب دفعہ ۴۹۴ نتیجۂ صریح معدوم ہوجاتے ہیں- اِس سے ظاہر ہے کہ مفروضہ مقطعہ کی قیمت اُس مقطعہ کے مساوی ہے جو اصلی مقطعہ کے

پہلے ستون کے اجزائے افرادی میں سے باقی ستونوں کے متناظر اجزائے افرادی کے مساوی ضعف تفریق کرنے اور باقی ستونوں کو حسب سابق برقرار رکھنے سے حاصل ہوتا ہے۔

برعکس اس کے

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 & \text{ج}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 & \text{ج}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 & \text{ج}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ا}_1+\text{ف ب}_1+\text{ق ج}_1 & \text{ب}_1 & \text{ج}_1 \\ \text{ا}_2+\text{ف ب}_2+\text{ق ج}_2 & \text{ب}_2 & \text{ج}_2 \\ \text{ا}_3+\text{ف ب}_3+\text{ق ج}_3 & \text{ب}_3 & \text{ج}_3 \end{vmatrix}$$

نیز پہلے ستون کے متعلق جو بات اوپر ثابت کی جا چکی ہے وہ ہر ایک قطار یا ستون کے لئے درست ہے۔ پس ثابت ہوا کہ کسی ایک مقطعہ کو مختصر کرتے میں ہم کسی قطار یا ستون کو ایک اور ایسی قطار یا ستون سے بدل سکتے ہیں جو حسب ذیل طریقہ سے بنتا ہے۔

اس ستون یا قطار کو لو جس کے اجزائے افرادی کو آپ بدلنا چاہتے ہیں اور ان میں باقی ایک یا زیادہ قطاروں یا ستونوں کے متناظر اجزائے افرادی کے مساوی ضعف جمع یا تفریق کردو۔

تھوڑی سی مشق کے بعد یہ معلوم ہوگا کہ کسی مقطعہ کو اس کی دو یا زیادہ قطاروں یا ستونوں کو ایک ساتھ بدلنے سے فوراً مختصر کیا جا سکتا ہے۔ مثلاً یہ آسانی سے دیکھا جا سکتا ہے کہ

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1+\text{ف ب}_1 & \text{ب}_1-\text{ق ج}_1 & \text{ج}_1 \\ \text{ا}_2+\text{ف ب}_2 & \text{ب}_2-\text{ق ج}_2 & \text{ج}_2 \\ \text{ا}_3+\text{ف ب}_3 & \text{ب}_3-\text{ق ج}_3 & \text{ج}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 & \text{ج}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 & \text{ج}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 & \text{ج}_3 \end{vmatrix}$$

لیکن اس قاعدہ کو استعمال کرتے وقت یہ احتیاط رکھنی چاہئیے کہ

کم از کم ایک ستون یا قطار کو بغیر بدلے ویسے ہی چھوڑ دیا جائے۔ مثلاً اگر اوپر کی مساوات متماثلہ میں تیسرے ستون کے اجزائے افرادی بالترتیب $\text{ج}_1 + \text{د}\,\text{ا}_1$، $\text{ج}_2 + \text{د}\,\text{ا}_2$، $\text{ج}_3 + \text{د}\,\text{ا}_3$ میں بدل دئے جائیں تو مقطعہ کی قیمت میں بقدر

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1 + \text{ف}\,\text{ب}_1 & \text{ب}_1 - \text{ق}\,\text{ج}_1 & \text{د}\,\text{ا}_1 \\ \text{ا}_2 + \text{ف}\,\text{ب}_2 & \text{ب}_2 - \text{ق}\,\text{ج}_2 & \text{د}\,\text{ا}_2 \\ \text{ا}_3 + \text{ف}\,\text{ب}_3 & \text{ب}_3 - \text{ق}\,\text{ج}_3 & \text{د}\,\text{ا}_3 \end{vmatrix}$$

کا اضافہ ہو جائیگا اور یہ مقطعہ جن چار مقطعات میں تحلیل کیا جاسکتا ہے اُن میں سے ایک مقطعہ ایسا ہے جو معدوم نہیں ہوتا اور وہ یہ ہے:-

$$\begin{vmatrix} \text{ف}\,\text{ب}_1 & -\text{ق}\,\text{ج}_1 & \text{د}\,\text{ا}_1 \\ \text{ف}\,\text{ب}_2 & -\text{ق}\,\text{ج}_2 & \text{د}\,\text{ا}_2 \\ \text{ف}\,\text{ب}_3 & -\text{ق}\,\text{ج}_3 & \text{د}\,\text{ا}_3 \end{vmatrix}$$

مثال ۱- مقطعہ
$$\begin{vmatrix} 29 & 26 & 22 \\ 25 & 31 & 27 \\ 63 & 54 & 46 \end{vmatrix}$$
کی قیمت معلوم کرو۔

یہ مقطعہ
$$= \begin{vmatrix} 3 & 26 & -4 \\ -6 & 31 & -4 \\ 9 & 54 & -8 \end{vmatrix} = -3 \times 4 \times \begin{vmatrix} 1 & 26 & 1 \\ -2 & 31 & 1 \\ 3 & 54 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -12 \begin{vmatrix} 1 & 26 & 1 \\ -2 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -12 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 26 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -12 \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 132$$

[تشریح- اختصار کی پہلی منزل پہ دوسرے ستون کو برقرار رکھو، پہلے ستون کے اجزائے افرادی حاصل کرنے کے لئے دئے ہوئے مقطعہ کے دوسرے ستون کے اجزائے افرادی کو پہلے ستون کے متناظر اجزائے افرادی میں سے

تفریق کرو، نئے تیسرے ستون کے لئے دئے ہوئے مقطعہ کے تیسرے ستون کے اجزائے افرادی میں سے دوسرے ستون کے متناظر اجزائے افرادی تفریق کرو۔ دوسری منزل پر اجزائے ضربی '۳' اور '۴' باہر نکال لو۔ تیسری منزل پر پہلی قطار کو برقرار رکھو۔ دوسری نئی قطار کے لئے دوسری قطار کے اجزائے افرادی میں سے پہلی قطار کے متناظر اجزائے افرادی تفریق کرو، تیسری نئی قطار کے لئے پہلی قطار کے اجزائے افرادی کو ۲ سے ضرب دیکر تیسری قطار کے متناظر اجزائے افرادی میں سے تفریق کرو۔ بعد کی منزلیں بالکل آسان ہیں۔

مثال ۲۔ ثابت کرو کہ مقطعہ

$$\begin{vmatrix} \text{ا-ب-ج} & \text{۲ا} & \text{۲ا} \\ \text{۲ب} & \text{ب-ج-ا} & \text{۲ب} \\ \text{۲ج} & \text{۲ج} & \text{ج-ا-ب} \end{vmatrix} = (\text{ا+ب+ج})^{۳}$$

مندرجہ بالا مقطعہ =

$$\begin{vmatrix} \text{ا+ب+ج} & \text{ا+ب+ج} & \text{ا+ب+ج} \\ \text{۲ب} & \text{ب-ج-ا} & \text{۲ب} \\ \text{۲ج} & \text{۲ج} & \text{ج-ا-ب} \end{vmatrix}$$

$$= (\text{ا+ب+ج}) \times \begin{vmatrix} \text{۱} & \text{۱} & \text{۱} \\ \text{۲ب} & \text{ب-ج-ا} & \text{۲ب} \\ \text{۲ج} & \text{۲ج} & \text{ج-ا-ب} \end{vmatrix}$$

$$= (\text{ا+ب+ج}) \times \begin{vmatrix} \text{۱} & \text{۰} & \text{۰} \\ \text{۲ب} & \text{-ب-ج-ا} & \text{۰} \\ \text{۲ج} & \text{۰} & \text{-ج-ا-ب} \end{vmatrix} = (\text{ا+ب+ج}) \times \begin{vmatrix} \text{-ب-ج-ا} & \text{۰} \\ \text{۰} & \text{-ج-ا-ب} \end{vmatrix}$$

$$= (\text{ا+ب+ج})^{۳}$$

تشریح۔ پہلے نئے مقطعہ میں پہلی قطار ابتدائی مقطعہ کی تین قطاروں کے اجزائے افرادی کے حاصل جمع کے مساوی ہے اور دوسری اور تیسری قطاریں وہی ہیں۔ تیسرے نئے مقطعہ میں پہلے ستون کو برقرار رکھا گیا ہے اور دوسرے نئے ستون کے اجزائے افرادی دوسرے ستون کے اجزائے افرادی

یں سے پہلے ستون کے اجزائے افرادی تفریق کرنے سے حاصل ہوتے ہیں اور تیسرے نئے ستون کے اجزائے پہلے ستون کے اجزائے افرادی کو تیسرے ستون کے اجزائے افرادی میں سے تفریق کرنے سے حاصل ہوتے ہیں، باقی تبدیلیاں از خود واضح ہیں]۔

۴۹۷ — یہ بتانے سے پہلے کہ دو مقطعات کے حاصل ضرب کو ایک مقطعہ کی شکل میں کس طرح لکھا جاسکتا ہے ہم ذیل کے مقطعہ کی قیمت معلوم کرتے ہیں۔

$$\left|\begin{array}{ccc} \text{ا}_1\text{عب}_3+\text{ب}_1\text{بب}_3+\text{ج}_1\text{جب}_3 & \text{ا}_1\text{عب}_2+\text{ب}_1\text{بب}_2+\text{ج}_1\text{جب}_2 & \text{ا}_1\text{عب}_1+\text{ب}_1\text{بب}_1+\text{ج}_1\text{جب}_1 \\ \text{ا}_2\text{عب}_3+\text{ب}_2\text{بب}_3+\text{ج}_2\text{جب}_3 & \text{ا}_2\text{عب}_2+\text{ب}_2\text{بب}_2+\text{ج}_2\text{جب}_2 & \text{ا}_2\text{عب}_1+\text{ب}_2\text{بب}_1+\text{ج}_2\text{جب}_1 \\ \text{ا}_3\text{عب}_3+\text{ب}_3\text{بب}_3+\text{ج}_3\text{جب}_3 & \text{ا}_3\text{عب}_2+\text{ب}_3\text{بب}_2+\text{ج}_3\text{جب}_2 & \text{ا}_3\text{عب}_1+\text{ب}_3\text{بب}_1+\text{ج}_3\text{جب}_1 \end{array}\right|$$

دفعہ ۴۹۵ کی رو سے ہمیں معلوم ہے کہ مندرجۂ بالا مقطعہ ۲۷ مقطعات کے حاصل جمع کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے، اِن میں سے تین مقطعات بطور نمونہ ذیل میں درج کئے جاتے ہیں۔

$$\left|\begin{array}{ccc} \text{ب}_1\text{بب}_3 & \text{ج}_1\text{جب}_2 & \text{ا}_1\text{عب}_1 \\ \text{ب}_2\text{بب}_3 & \text{ج}_2\text{جب}_2 & \text{ا}_2\text{عب}_1 \\ \text{ب}_3\text{بب}_3 & \text{ج}_3\text{جب}_2 & \text{ا}_3\text{عب}_1 \end{array}\right| ، \left|\begin{array}{ccc} \text{ج}_1\text{جب}_3 & \text{ب}_1\text{بب}_2 & \text{ا}_1\text{عب}_1 \\ \text{ج}_2\text{جب}_3 & \text{ب}_2\text{بب}_2 & \text{ا}_2\text{عب}_1 \\ \text{ج}_3\text{جب}_3 & \text{ب}_3\text{بب}_2 & \text{ا}_3\text{عب}_1 \end{array}\right| ، \left|\begin{array}{ccc} \text{ا}_1\text{عب}_3 & \text{ا}_1\text{عب}_2 & \text{ا}_1\text{عب}_1 \\ \text{ا}_2\text{عب}_3 & \text{ا}_2\text{عب}_2 & \text{ا}_2\text{عب}_1 \\ \text{ا}_3\text{عب}_3 & \text{ا}_3\text{عب}_2 & \text{ا}_3\text{عب}_1 \end{array}\right|$$

اور یہ مقطعات بالترتیب

$$\left|\begin{array}{ccc} \text{ب}_1 & \text{ج}_1 & \text{ا}_1 \\ \text{ب}_2 & \text{ج}_2 & \text{ا}_2 \\ \text{ب}_3 & \text{ج}_3 & \text{ا}_3 \end{array}\right| \text{عب}_1\text{بب}_3\text{جب}_2 ، \left|\begin{array}{ccc} \text{ج}_1 & \text{ب}_1 & \text{ا}_1 \\ \text{ج}_2 & \text{ب}_2 & \text{ا}_2 \\ \text{ج}_3 & \text{ب}_3 & \text{ا}_3 \end{array}\right| \text{عب}_1\text{بب}_2\text{جب}_3 ، \left|\begin{array}{ccc} \text{ا}_1 & \text{ا}_1 & \text{ا}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ا}_2 & \text{ا}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ا}_3 & \text{ا}_3 \end{array}\right| \text{عب}_1\text{عب}_2\text{عب}_3$$

کے مساوی ہیں، اِن میں سے پہلا مقطعہ معدوم ہوجاتا ہے، اِسی طرح سے یہ دیکھا جاسکتا ہو کہ کل ۲۷ مقطعات میں سے ۲۱ مقطعات معدوم ہوجاتے ہیں۔

اور باقی کے چھ مقطعات مساوی ہیں

$$(ع_1 ب_2 ج_3 - ع_1 ب_3 ج_2 + ع_2 ب_3 ج_1 - ع_2 ب_1 ج_3 + ع_3 ب_1 ج_2 - ع_3 ب_2 ج_1) \times \begin{vmatrix} ا_1 & ب_1 & ج_1 \\ ا_2 & ب_2 & ج_2 \\ ا_3 & ب_3 & ج_3 \end{vmatrix}$$

کے یعنی

$$\begin{vmatrix} ع_1 & ب_1 & ج_1 \\ ع_2 & ب_2 & ج_2 \\ ع_3 & ب_3 & ج_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} ا_1 & ب_1 & ج_1 \\ ا_2 & ب_2 & ج_2 \\ ا_3 & ب_3 & ج_3 \end{vmatrix}$$

لہٰذا دیا ہُوا مقطعہ دو مقطعات کے حاصل ضرب کی رقوم میں بیان ہو سکتا ہے۔

۴۹۸۔ دو مقطعات کا حاصلِ ضرب ایک مقطعہ ہوتا ہے۔
ذیل کی دو خطی مساواتوں پر غور کرو

$$\left.\begin{aligned} ا_1 لا_1 + ب_1 لا_2 &= 0 \\ ا_2 لا_1 + ب_2 لا_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{..........(1)}$$

جہاں

$$\left.\begin{aligned} لا_1 &= ع_1 لا'_1 + ع_2 لا'_2 \\ لا_2 &= ب_1 لا'_1 + ب_2 لا'_2 \end{aligned}\right\} \quad \text{..........(2)}$$

$لا_1$ اور $لا_2$ کی یہ قیمتیں (۱) میں مندرج کرنے سے

$$\left.\begin{aligned} (ا_1 ع_1 + ب_1 ب_1) لا'_1 + (ا_1 ع_2 + ب_1 ب_2) لا'_2 &= 0 \\ (ا_2 ع_1 + ب_2 ب_1) لا'_1 + (ا_2 ع_2 + ب_2 ب_2) لا'_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{.....(3)}$$

اب اگر $لا'_1$ اور $لا'_2$ کی قیمتوں (سوائے صفر) کے لئے ہمزاد مساواتیں (۳) ایک ساتھ پوری ہوں تو اس کے لئے ضرور ہے کہ

$$\begin{vmatrix} ا_1 ع_1 + ب_1 ب_1 & ا_1 ع_2 + ب_1 ب_2 \\ ا_2 ع_1 + ب_2 ب_1 & ا_2 ع_2 + ب_2 ب_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{..........(4)}$$

لیکن مساواتیں (۳) پوری ہونگی اگر مساواتیں (۱) پوری ہوں اور مساواتیں (۱) پوری ہونگی اگر یا

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \cdots\cdots (5)$$

یا $\lambda_1 = 0$ اور $\lambda_2 = 0$

یعنی موخرالذکر شرط کی وجہ سے

$$\begin{vmatrix} \text{عہ}_1 & \text{بہ}_1 \\ \text{عہ}_2 & \text{بہ}_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \cdots\cdots (6)$$

پس اگر مساواتیں (۵) اور (۶) پوری ہوں تو مساوات (۴) بھی پوری ہوگی لہذا مساوات (۴) کے مقطعہ میں مساواتوں (۵) اور (۶) کے مقطعات بطور اجزائے ضربی شامل ہونگے۔ نیز (۴) کے مقطعہ کے ابعاد اور مساواتوں (۵) اور (۶) کے مقطعات کے حاصل ضرب کے ابعاد پر غور کرنے سے ظاہر ہے کہ (۴) کا اگر کوئی اور جزو ضربی ہو تو وہ صرف عددی ہوگا لہذا۔

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \text{عہ}_1 & \text{بہ}_1 \\ \text{عہ}_2 & \text{بہ}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ا}_1\text{عہ}_1 + \text{ب}_1\text{بہ}_1 & \text{ا}_1\text{عہ}_2 + \text{ب}_1\text{بہ}_2 \\ \text{ا}_2\text{عہ}_1 + \text{ب}_2\text{بہ}_1 & \text{ا}_2\text{عہ}_2 + \text{ب}_2\text{بہ}_2 \end{vmatrix}$$

کیونکہ مساواتوں کے دونوں طرف $\text{ا}_1 \text{ب}_2 \text{عہ}_1 \text{بہ}_2$ کے جو سر ہیں اُن کا مقابلہ کرنے سے ظاہر ہے کہ مذکورۂ بالا عددی سر ۱ ہے۔

نتیجہ صریح۔
$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} \text{ا}_1^2 + \text{ب}_1^2 & \text{ا}_1\text{ا}_2 + \text{ب}_1\text{ب}_2 \\ \text{ا}_1\text{ا}_2 + \text{ب}_1\text{ب}_2 & \text{ا}_2^2 + \text{ب}_2^2 \end{vmatrix}$$

مندرجہ بالا طریقۂ ثبوت بالکل عام ہے اور ہر رتبہ کے مقطعات پر اُس کا مساوی طور پر اطلاق ہو سکتا ہے۔

چونکہ ایک مقطعہ کی قیمت میں اسکی قطاروں کو ستونوں میں اور اسکے ستونوں کو قطاروں میں بدلنے سے کوئی فرق نہیں آتا اس لئے ظاہر ہے کہ دو مقطعات کے حاصلِ ضرب کو ایک مقطعہ کی شکل میں کئی طریقوں سے لکھا جا سکتا ہے، لیکن ان سب کو پھیلانے سے ایک ہی جواب حاصل ہوگا۔

مثال۔ ثابت کرو کہ

$$\begin{vmatrix} \text{اَ}_1 & -\text{بَ}_1 & \text{جَ}_1 \\ -\text{اَ}_2 & \text{بَ}_2 & -\text{جَ}_2 \\ \text{اَ}_3 & -\text{بَ}_3 & \text{جَ}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 & \text{ج}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 & \text{ج}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 & \text{ج}_3 \end{vmatrix}^2$$

جہاں اَ_1، اَ_2، بَ_1، بَ_2 ....، بالترتیب ا_1، ا_2، ب_1، ب_2 .... کے صغائر ہیں۔

فرض کرو کہ دائیں طرف کے مقطعہ کو ق سے اور بائیں طرف کے مقطعہ کو قَ سے تعبیر کیا جاتا ہے۔ تب

$$\text{ق قَ} = \begin{vmatrix} \text{ا}_1\text{اَ}_1 - \text{ب}_1\text{بَ}_1 + \text{ج}_1\text{جَ}_1 & \text{ا}_2\text{اَ}_1 - \text{ب}_2\text{بَ}_1 + \text{ج}_2\text{جَ}_1 & \text{ا}_3\text{اَ}_1 - \text{ب}_3\text{بَ}_1 + \text{ج}_3\text{جَ}_1 \\ -\text{ا}_1\text{اَ}_2 + \text{ب}_1\text{بَ}_2 - \text{ج}_1\text{جَ}_2 & -\text{ا}_2\text{اَ}_2 + \text{ب}_2\text{بَ}_2 - \text{ج}_2\text{جَ}_2 & -\text{ا}_3\text{اَ}_2 + \text{ب}_3\text{بَ}_2 - \text{ج}_3\text{جَ}_2 \\ \text{ا}_1\text{اَ}_3 - \text{ب}_1\text{بَ}_3 + \text{ج}_1\text{جَ}_3 & \text{ا}_2\text{اَ}_3 - \text{ب}_2\text{بَ}_3 + \text{ج}_2\text{جَ}_3 & \text{ا}_3\text{اَ}_3 - \text{ب}_3\text{بَ}_3 + \text{ج}_3\text{جَ}_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \text{ق} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \text{ق} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \text{ق} \end{vmatrix}$$

(دفعہ ۴۹۳) پس $\text{ق قَ} = \text{ق}^3$، لہٰذا $\text{قَ} = \text{ق}^2$

امثلہ نمبری ۳۳ (ا)

ذیل کے مقطعات کی قیمتیں محسوب کرو:-

(۱) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 34 & 37 & 35 \\ 25 & 26 & 23 \end{vmatrix}$　　(۲) $\begin{vmatrix} 19 & 16 & 13 \\ 20 & 17 & 14 \\ 21 & 18 & 15 \end{vmatrix}$

(۳) $\begin{vmatrix} 23 & 3 & 13 \\ 53 & 7 & 30 \\ 70 & 9 & 39 \end{vmatrix}$　　(۴) $\begin{vmatrix} \text{گ} & \text{ھ} & \text{ا} \\ \text{ف} & \text{ب} & \text{ھ} \\ \text{ج} & \text{ف} & \text{گ} \end{vmatrix}$　　(۵) $\begin{vmatrix} -\text{ما} & \text{ی} & 1 \\ \text{لا} & 1 & -\text{ی} \\ 1 & -\text{لا} & \text{ما} \end{vmatrix}$

(۶) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\text{لا} & 1 \\ 1+\text{ما} & 1 & 1 \end{vmatrix}$　　(۷) $\begin{vmatrix} \text{ج}-\text{ا} & \text{ب}-\text{ج} & \text{ا}-\text{ب} \\ \text{ا}-\text{ب} & \text{ج}-\text{ا} & \text{ب}-\text{ج} \\ \text{ب}-\text{ج} & \text{ا}-\text{ب} & \text{ج}-\text{ا} \end{vmatrix}$

(۸) $\begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ا} & \text{ب}+\text{ج} \\ \text{ب} & \text{ج}+\text{ا} & \text{ب} \\ \text{ا}+\text{ب} & \text{ج} & \text{ج} \end{vmatrix}$

اگر اکا ایک جذر الکعب سہ ہو تو ذیل کے دو مقطوعات کی قیمتیں معلوم کرو

(۹) $\begin{vmatrix} \text{سہ}^2 & \text{سہ} & 1 \\ 1 & \text{سہ}^2 & \text{سہ} \\ \text{سہ} & 1 & \text{سہ}^2 \end{vmatrix}$　　(۱۰) $\begin{vmatrix} \text{سہ}^2 & \text{سہ}^3 & 1 \\ \text{سہ} & 1 & \text{سہ}^3 \\ 1 & \text{سہ} & \text{سہ}^2 \end{vmatrix}$

۱۱- ذیل کی مساواتوں

ا ل + ج م + ب ن = ۰، ج ل + ب م + ا ن = ۰، ب ل + ا م + ج ن = ۰

میں سے ل، م، ن کو ساقط کرو اور نتیجہ کو سادہ ترین شکل میں لکھو

۱۲- مقطوعات کو پھیلائے بغیر ثابت کرو کہ

$$\begin{vmatrix} \text{ج} & \text{ب} & \text{ا} \\ \text{ی} & \text{ما} & \text{لا} \\ \text{ر} & \text{ق} & \text{ف} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ق} & \text{ب} & \text{ما} \\ \text{ف} & \text{ا} & \text{لا} \\ \text{ر} & \text{ج} & \text{ی} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ی} & \text{ما} & \text{لا} \\ \text{ر} & \text{ق} & \text{ف} \\ \text{ج} & \text{ب} & \text{ا} \end{vmatrix}$$

۱۳- ذیل کی مساواتوں کو حل کرو:

(۱) $\begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ا} & \text{لا} \\ \text{م} & \text{م} & \text{م} \\ \text{ب} & \text{لا} & \text{ب} \end{vmatrix} = \text{۰}$

(۲) $\begin{vmatrix} \text{۱۵} - \text{۲لا} & \text{۱۱} & \text{۱۰} \\ \text{۱۱} - \text{۳لا} & \text{۱۷} & \text{۱۶} \\ \text{۷} - \text{لا} & \text{۱۴} & \text{۱۳} \end{vmatrix} = \text{۰}$

ذیل کی متماثلات کو ثابت کرو۔

۱۴- $\begin{vmatrix} \text{ب}+\text{ج} & \text{ج}+\text{ا} & \text{ا}+\text{ب} \\ \text{ق}+\text{ر} & \text{ر}+\text{ف} & \text{ف}+\text{ق} \\ \text{ما}+\text{ی} & \text{ی}+\text{لا} & \text{لا}+\text{ما} \end{vmatrix} = \text{۲} \begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ب} & \text{ج} \\ \text{ف} & \text{ق} & \text{ر} \\ \text{لا} & \text{ما} & \text{ی} \end{vmatrix}$

۱۵- $\begin{vmatrix} \text{۱} & \text{ا} & \text{ا}^{\text{۲}} \\ \text{۱} & \text{ب} & \text{ب}^{\text{۲}} \\ \text{۱} & \text{ج} & \text{ج}^{\text{۲}} \end{vmatrix} = (\text{ب}-\text{ج})(\text{ج}-\text{ا})(\text{ا}-\text{ب})$

۱۶- $\begin{vmatrix} \text{۱} & \text{۱} & \text{۱} \\ \text{ا} & \text{ب} & \text{ج} \\ \text{ا}^{\text{۳}} & \text{ب}^{\text{۳}} & \text{ج}^{\text{۳}} \end{vmatrix} = (\text{ب}-\text{ج})(\text{ج}-\text{ا})(\text{ا}-\text{ب})(\text{ا}+\text{ب}+\text{ج})$

۱۷- $\begin{vmatrix} \text{لا} & \text{ما} & \text{ی} \\ \text{لا}^{\text{۲}} & \text{ما}^{\text{۲}} & \text{ی}^{\text{۲}} \\ \text{مای} & \text{یلا} & \text{لاما} \end{vmatrix} = (\text{ما}-\text{ی})(\text{ی}-\text{لا})(\text{لا}-\text{ما})(\text{مای}+\text{یلا}+\text{لاما})$

۱۸- $\begin{vmatrix} -\text{۲ا} & \text{ا}+\text{ب} & \text{ا}+\text{ج} \\ \text{ب}+\text{ا} & -\text{۲ب} & \text{ب}+\text{ج} \\ \text{ج}+\text{ا} & \text{ج}+\text{ب} & -\text{۲ج} \end{vmatrix} = \text{۴}(\text{ب}+\text{ج})(\text{ج}+\text{ا})(\text{ا}+\text{ب})$

۱۹- $\begin{vmatrix} (\text{ب}+\text{ج})^{\text{۲}} & \text{ا}^{\text{۲}} & \text{ا}^{\text{۲}} \\ \text{ب}^{\text{۲}} & (\text{ج}+\text{ا})^{\text{۲}} & \text{ب}^{\text{۲}} \\ \text{ج}^{\text{۲}} & \text{ج}^{\text{۲}} & (\text{ا}+\text{ب})^{\text{۲}} \end{vmatrix} = \text{۲ ا ب ج} (\text{ا}+\text{ب}+\text{ج})^{\text{۳}}$

۲۰۔
| ب ج ج |
| ج ا ا |
| ب ا ا |^2 کو مقطعہ کی شکل میں لکھو۔

۲۱۔ وہ شرط معلوم کرو کہ مساوات ل لا + م ما + ن ی = ۰ مجہول مقداروں کی قیمتوں کے تین جُٹوں (ا$_1$، ب$_1$، ج$_1$)، (ا$_2$، ب$_2$، ج$_2$)، (ا$_3$، ب$_3$، ج$_3$) سے پوری ہو اور ثابت کرو کہ یہ شرط وہی ہے جو تین مساواتوں ا$_1$ لا + ب$_1$ ما + ج$_1$ ی = ۰، ا$_2$ لا + ب$_2$ ما + ج$_2$ ی = ۰، ا$_3$ لا + ب$_3$ ما + ج$_3$ ی = ۰ کے ایک ساتھ ل، م، ن سے پورے ہونے کی شرط ہے۔

۲۲۔
| ا^2 + لہ^2 ، اب + ج لہ ، ج ا - ب لہ |
| اب - ج لہ ، ب^2 + لہ^2 ، ب ج + ا لہ |
| ج ا + ب لہ ، ب ج - ا لہ ، ج^2 + لہ^2 |
×
| لہ ، ج ، - ب |
| - ج ، لہ ، ا |
| ب ، - ا ، لہ |
کی قیمت معلوم کرو۔

۲۳۔ ثابت کرو کہ
| ا + خ ب ، ج + خ د |
| - ج + خ د ، ا - خ ب |
×
| عہ - خ بہ ، جہ - خ لہ |
| - جہ - خ لہ ، عہ + خ بہ |

جہاں خ = $\sqrt{-1}$، ذیل کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے:-

| اَ - خ بَ ، جَ - خ دَ |
| - جَ - خ دَ ، اَ + خ بَ |

اس سے ذیل کا مسئلہ مستنبط کرو جو آئیلر[1] سے منسوب ہے۔
اگر دو جملوں میں ہر ایک چار مربعوں کے حاصل جمع پر مشتمل ہو تو ان جملوں کے حاصلِ ضرب کو چار مربعوں کے حاصل جمع کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔

ذیل کی متماثلہ مساواتیں ثابت کرو۔

[1] Euler ؎

۲۴۔
۱	ب ج + ا د	ب^2 ج^2 + ا^2 د^2
۱	ج ا + ب د	ج^2 ا^2 + ب^2 د^2
۱	ا ب + ج د	ا^2 ب^2 + ج^2 د^2

= −(ب − ج)(ج − ا)(ا − ب)(ا − د)(ب − د)(ج − د)

۲۵۔
ب ج − ا^2	ج ا − ب^2	ا ب − ج^2
−ب ج + ج ا + ا ب	ب ج − ج ا + ا ب	ب ج + ج ا − ا ب
(ا + ب)(ا + ج)	(ب + ج)(ب + ا)	(ج + ا)(ج + ب)

= ۳(ب − ج)(ج − ا)(ا − ب)(ا + ب + ج)(ب ج + ج ا + ا ب)

۲۶۔
(ا − لا)^2	(ا − ما)^2	(ا − ی)^2
(ب − لا)^2	(ب − ما)^2	(ب − ی)^2
(ج − لا)^2	(ج − ما)^2	(ج − ی)^2

= ۲(ب − ج)(ج − ا)(ا − ب)(ما − ی)(ی − لا)(لا − ما)

۲۷۔ اس شرط کو کہ جملہ
ا عا^2 + ب با^2 + ج جا^2 + ۲ اَ با جا + ۲ بَ جا عا + ۲ جَ عا با
عا، با، جا میں درجہ اول کے دو اجزائے ضربی کے حاصلِ ضرب کے مساوی ہو ایک مقطعہ کی شکل میں ظاہر کرو۔

۲۸۔ مساوات ذیل
لَ + ا^2 لا	نَ + ا ب لا	مَ + ا ج لا
نَ + ا ب لا	مَ + ب^2 لا	لَ + ب ج لا
مَ + ا ج لا	لَ + ب ج لا	نَ + ج^2 لا

= ۰

کو حل کرو اور جواب کو مقطعات کی شکل میں ظاہر کرو۔

۴۹۹۔ مقطعات کے خواص کی مدد سے ہمزاد خطی مساواتیں نہایت آسانی سے حل ہو سکتی ہیں۔ فرض کرو کہ مساواتیں یہ ہیں:-

$$\text{ا}_1\text{لا} + \text{ب}_1\text{ما} + \text{ج}_1\text{ی} + \text{د}_1 = ۰$$
$$\text{ا}_2\text{لا} + \text{ب}_2\text{ما} + \text{ج}_2\text{ی} + \text{د}_2 = ۰$$
$$\text{ا}_3\text{لا} + \text{ب}_3\text{ما} + \text{ج}_3\text{ی} + \text{د}_3 = ۰$$

ان کو بالترتیب $\text{ا}'_1$، $-\text{ا}'_2$، $\text{ا}'_3$ سے ضرب دو جہاں $\text{ا}'_1$، $\text{ا}'_2$، $\text{ا}'_3$ بالترتیب ا_1، ا_2، ا_3 کے صغائر ہیں ذیل کے مقطعہ میں

$$\text{ق} = \begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 & \text{ج}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 & \text{ج}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 & \text{ج}_3 \end{vmatrix}$$

ان حاصل ضربوں کو جمع کرو۔ تب ما اور ی کے سر دفعہ ۳۹۴ کے روابط کی رُو سے معدوم ہو جاتے ہیں اور ہمیں حاصل ہوتا ہے:-

$$(\text{ا}_1\text{ا}'_1 - \text{ا}_2\text{ا}'_2 + \text{ا}_3\text{ا}'_3)\text{لا} + (\text{د}_1\text{ا}'_1 - \text{د}_2\text{ا}'_2 + \text{د}_3\text{ا}'_3) = ۰$$

اسی طرح سے ثابت کیا جا سکتا ہے کہ

$$(\text{ب}_1\text{ب}'_1 - \text{ب}_2\text{ب}'_2 + \text{ب}_3\text{ب}'_3)\text{ما} + (\text{د}_1\text{ب}'_1 - \text{د}_2\text{ب}'_2 + \text{د}_3\text{ب}'_3) = ۰$$

اور $(\text{ج}_1\text{ج}'_1 - \text{ج}_2\text{ج}'_2 + \text{ج}_3\text{ج}'_3)\text{ی} + (\text{د}_1\text{ج}'_1 - \text{د}_2\text{ج}'_2 + \text{د}_3\text{ج}'_3) = ۰$

اب $\text{ا}_1\text{ا}'_1 - \text{ا}_2\text{ا}'_2 + \text{ا}_3\text{ا}'_3 = -(\text{ب}_1\text{ب}'_1 - \text{ب}_2\text{ب}'_2 + \text{ب}_3\text{ب}'_3)$

$$= \text{ج}_1\text{ج}'_1 - \text{ج}_2\text{ج}'_2 + \text{ج}_3\text{ج}'_3 = \text{ق}$$

پس حل مطلوبہ کو ذیل کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے:

$$\frac{\text{لا}}{\begin{vmatrix} \text{د}_1 & \text{ب}_1 & \text{ج}_1 \\ \text{د}_2 & \text{ب}_2 & \text{ج}_2 \\ \text{د}_3 & \text{ب}_3 & \text{ج}_3 \end{vmatrix}} = \frac{-\text{ما}}{\begin{vmatrix} \text{د}_1 & \text{ا}_1 & \text{ج}_1 \\ \text{د}_2 & \text{ا}_2 & \text{ج}_2 \\ \text{د}_3 & \text{ا}_3 & \text{ج}_3 \end{vmatrix}} = \frac{\text{ی}}{\begin{vmatrix} \text{د}_1 & \text{ا}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{د}_2 & \text{ا}_2 & \text{ب}_2 \\ \text{د}_3 & \text{ا}_3 & \text{ب}_3 \end{vmatrix}} = \frac{-۱}{\begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 & \text{ج}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 & \text{ج}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 & \text{ج}_3 \end{vmatrix}}$$

یا زیادہ تشاکلاً

$$\frac{\text{لا}}{\begin{vmatrix} \text{ب}_1 & \text{ب}_2 & \text{ب}_3 \\ \text{ج}_1 & \text{ج}_2 & \text{ج}_3 \\ \text{د}_1 & \text{د}_2 & \text{د}_3 \end{vmatrix}} = \frac{-\text{ما}}{\begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ا}_2 & \text{ا}_3 \\ \text{ج}_1 & \text{ج}_2 & \text{ج}_3 \\ \text{د}_1 & \text{د}_2 & \text{د}_3 \end{vmatrix}} = \frac{\text{ی}}{\begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ا}_2 & \text{ا}_3 \\ \text{ب}_1 & \text{ب}_2 & \text{ب}_3 \\ \text{د}_1 & \text{د}_2 & \text{د}_3 \end{vmatrix}} = \frac{-1}{\begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ا}_2 & \text{ا}_3 \\ \text{ب}_1 & \text{ب}_2 & \text{ب}_3 \\ \text{ج}_1 & \text{ج}_2 & \text{ج}_3 \end{vmatrix}}$$

۵۰۰ — فرض کرو کہ ہمیں چار متجانس خطی مساواتوں کا ایک نظام دیا ہے:

$$\text{ا}_1\,\text{لا} + \text{ب}_1\,\text{ما} + \text{ج}_1\,\text{ی} + \text{د}_1\,\text{ھ} = 0$$
$$\text{ا}_2\,\text{لا} + \text{ب}_2\,\text{ما} + \text{ج}_2\,\text{ی} + \text{د}_2\,\text{ھ} = 0$$
$$\text{ا}_3\,\text{لا} + \text{ب}_3\,\text{ما} + \text{ج}_3\,\text{ی} + \text{د}_3\,\text{ھ} = 0$$
$$\text{ا}_4\,\text{لا} + \text{ب}_4\,\text{ما} + \text{ج}_4\,\text{ی} + \text{د}_4\,\text{ھ} = 0$$

تب آخر کی تین مساواتوں سے حسب دفعہ ماقبل

$$\frac{\text{لا}}{\begin{vmatrix} \text{ب}_2 & \text{ب}_3 & \text{ب}_4 \\ \text{ج}_2 & \text{ج}_3 & \text{ج}_4 \\ \text{د}_2 & \text{د}_3 & \text{د}_4 \end{vmatrix}} = \frac{-\text{ما}}{\begin{vmatrix} \text{ا}_2 & \text{ا}_3 & \text{ا}_4 \\ \text{ج}_2 & \text{ج}_3 & \text{ج}_4 \\ \text{د}_2 & \text{د}_3 & \text{د}_4 \end{vmatrix}} = \frac{\text{ی}}{\begin{vmatrix} \text{ا}_2 & \text{ا}_3 & \text{ا}_4 \\ \text{ب}_2 & \text{ب}_3 & \text{ب}_4 \\ \text{د}_2 & \text{د}_3 & \text{د}_4 \end{vmatrix}} = \frac{-\text{ھ}}{\begin{vmatrix} \text{ا}_2 & \text{ا}_3 & \text{ا}_4 \\ \text{ب}_2 & \text{ب}_3 & \text{ب}_4 \\ \text{ج}_2 & \text{ج}_3 & \text{ج}_4 \end{vmatrix}}$$

پہلی مساوات میں یہ قیمتیں مندرج کرنے سے حاصل اسقاط مطلوبہ یہ ہے:-

$$\text{ا}_1\begin{vmatrix} \text{ب}_2 & \text{ب}_3 & \text{ب}_4 \\ \text{ج}_2 & \text{ج}_3 & \text{ج}_4 \\ \text{د}_2 & \text{د}_3 & \text{د}_4 \end{vmatrix} - \text{ب}_1\begin{vmatrix} \text{ا}_2 & \text{ا}_3 & \text{ا}_4 \\ \text{ج}_2 & \text{ج}_3 & \text{ج}_4 \\ \text{د}_2 & \text{د}_3 & \text{د}_4 \end{vmatrix} + \text{ج}_1\begin{vmatrix} \text{ا}_2 & \text{ا}_3 & \text{ا}_4 \\ \text{ب}_2 & \text{ب}_3 & \text{ب}_4 \\ \text{د}_2 & \text{د}_3 & \text{د}_4 \end{vmatrix} - \text{د}_1\begin{vmatrix} \text{ا}_2 & \text{ا}_3 & \text{ا}_4 \\ \text{ب}_2 & \text{ب}_3 & \text{ب}_4 \\ \text{ج}_2 & \text{ج}_3 & \text{ج}_4 \end{vmatrix} = 0$$

اس کو زیادہ مختصر طور پر حسب ذیل شکل میں بھی لکھا جاسکتا ہے:-

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ا}_2 & \text{ا}_3 & \text{ا}_4 \\ \text{ب}_1 & \text{ب}_2 & \text{ب}_3 & \text{ب}_4 \\ \text{ج}_1 & \text{ج}_2 & \text{ج}_3 & \text{ج}_4 \\ \text{د}_1 & \text{د}_2 & \text{د}_3 & \text{د}_4 \end{vmatrix} = 0$$

جہاں دائیں طرف کا جملہ چوتھے رتبہ کا ایک مقطعہ ہے۔

نیز ہم دیکھ سکتے ہیں کہ ا_1، ب_1، ج_1، د_1 کے سر مع اپنی صحیح علامت کے بالترتیب وہ صغائر ہیں جو اِن اجزائے افرادی میں سے گذرنے والے ستون اور قطار کو نکال دینے سے حاصل ہوتے ہیں۔

۱۰۵ - زیادہ عام طور پر اگر ہمارے پاس ن متجانس خطی مساواتیں

$$\text{ا}_1\text{لا}_1 + \text{ب}_1\text{لا}_2 + \text{ج}_1\text{لا}_3 + \ldots\ldots + \text{ک}_1\text{لا}_\text{ن} = 0$$

$$\text{ا}_2\text{لا}_1 + \text{ب}_2\text{لا}_2 + \text{ج}_2\text{لا}_3 + \ldots\ldots + \text{ک}_2\text{لا}_\text{ن} = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\text{ا}_\text{ن}\text{لا}_1 + \text{ب}_\text{ن}\text{لا}_2 + \text{ج}_\text{ن}\text{لا}_3 + \ldots\ldots + \text{ک}_\text{ن}\text{لا}_\text{ن} = 0$$

ہوں جن میں ن مجہول مقداریں لا_1، لا_2، لا_3، ..... $\text{لا}_\text{ن}$ شامل ہوں تو ہم اِن مقداروں کو ساقط کرکے نتیجہ کو حسبِ ذیل شکل میں لکھ سکتے ہیں:-

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 & \text{ج}_1 & \ldots & \text{ک}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 & \text{ج}_2 & \ldots & \text{ک}_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \text{ا}_\text{ن} & \text{ب}_\text{ن} & \text{ج}_\text{ن} & & \text{ک}_\text{ن} \end{vmatrix} = 0$$

اِس مساوات کے دائیں جانب کا رُکن ایک مقطعہ ہے جس میں ن قطاریں اور ن ستون ہیں، ایسے مقطعہ کو ن ویں رُتبہ کا مقطعہ کہتے ہیں۔

مقطعات کی اِس عام ترین شکل پر بحث کرنا کتابِ ہٰذا کے حدود سے باہر ہے تاہم یہ بیان کردینا کافی ہے کہ مقطعات کے وہ خواص جو دوسرے اور تیسرے رُتبہ کے مقطعات کے لئے ثابت کئے جاچکے ہیں وہ بالکل عام ہیں اور ہر رُتبہ کے مقطعات پر اُن کا

اطلاق ہو سکتا ہے۔ مثلاً ن ویں مرتبہ کا مندرجہ بالا مقطعہ

$$\text{ا}_1\text{اَ}_1 - \text{ب}_1\text{بَ}_1 + \text{ج}_1\text{جَ}_1 - \text{د}_1\text{دَ}_1 + \ldots\ldots + (-1)^{\text{ن}-1}\text{ک}_1\text{کَ}_1$$

$$\text{یا}\quad \text{ا}_1\text{اَ}_1 - \text{ا}_2\text{اَ}_2 + \text{ا}_3\text{اَ}_3 - \text{ا}_4\text{اَ}_4 + \ldots\ldots + (-1)^{\text{ن}-1}\text{ا}_{\text{ن}}\text{اَ}_{\text{ن}}$$

کے مساوی ہے جبکہ اِن کو بالترتیب پہلی قطار یا پہلے ستون سے پھیلایا جائے۔ اِن میں جن حروف پر زبریں ہیں وہ متناظر چھوٹے حروف کے صغائر کو تعبیر کرتے ہیں یعنی زبر والا حرف (ن - ۱) ویں رتبہ کے ایک مقطعہ کو تعبیر کرتا ہے۔ اب اِن (ن - ۱) ویں مرتبہ والے مقطعات میں سے ہر ایک کو (ن - ۲) ویں مرتبہ کے مقطعات کے حاصل جمع کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے اور علیٰ ہذا القیاس اِس طرح بالآخر مقطعہ مذکور کی تفصیلی شکل معلوم کی جا سکتی ہے۔

اگرچہ ہر ایک مقطعہ کو مندرجہ بالا طریقہ کے مطابق پھیلایا جا سکتا ہے لیکن یاد رہے کہ یہ طریقہ ہر مقطعہ کو پھیلانے کے لئے ہمیشہ آسان ترین نہیں ہوتا خاص کر اُس صورت میں جبکہ ہمارا مقصد مقطعہ کی پوری قیمت دریافت کرنا نہ ہو بلکہ محض اِس کے اجزائے ترکیبی کی علامات معلوم کرنا مطلوب ہو۔

۲۰۵ - مقطعہ ذیل

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 & \text{ج}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 & \text{ج}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 & \text{ج}_3 \end{vmatrix}$$

کی تفصیلی صورت $= \text{ا}_1\text{ب}_2\text{ج}_3 - \text{ا}_1\text{ب}_3\text{ج}_2 + \text{ا}_2\text{ب}_3\text{ج}_1 - \text{ا}_2\text{ب}_1\text{ج}_3 + \text{ا}_3\text{ب}_1\text{ج}_2 - \text{ا}_3\text{ب}_2\text{ج}_1$

یہ ظاہر ہے کہ ہر ایک جزوِ ترکیبی تین اجزائے ضربی کے حاصلِ ضرب پر مشتمل ہے۔ جن میں سے ایک ایک ہر قطار سے لیا گیا ہے

اور ایک ایک ہر ستون سے، نیز نصف رقموں کی علامت مثبت ہے اور نصف کی منفی۔ سب اجزائے ترکیبی کی علامتیں حسبِ ذیل طریقہ سے معلوم ہوسکتی ہیں، پہلا جزوِ ترکیبی ا$_1$ ب$_2$ ج$_3$ ہے ایس لاحقے ترتیبِ حسابی میں ہیں اس کی علامت مثبت ہے، اسکو ہم جزوِ رئیس کہینگے۔ باقی سب اجزائے ترکیبی اِس کے اعداد لاحقہ کی ترتیب بدلنے سے حاصل ہوسکتے ہیں۔ کسی جزوِ ترکیبی کی علامت معلوم کرنے کا یہ قاعدہ ہے:۔ اگر جزوِ رئیس کے لاحقوں میں سے دو دو لیکر اِن کی ترتیب بدلتے جائیں یہاں تک کہ مذکورہ جزوِ ترکیبی حاصل ہوجائے تو ایسی ترتیبوں کے بدلنے کی تعداد اگر جُفت ہو تو اس جزوِ ترکیبی کی علامت مثبت ہوگی اور اگر طاق ہو تو منفی۔ مثلاً جزوِ ترکیبی ا$_3$ ب$_2$ ج$_1$، جزوِ رئیس کے اعداد ۱ اور ۳ کو باہم ایک بار بدلنے سے حاصل ہوتا ہے۔ اِس لئے اِس کی علامت منفی ہوگی، جزوِ ترکیبی ا$_3$ ب$_1$ ج$_2$ پہلے اعداد ۱ اور ۳ کو باہم بدلنے سے اور پھر اعداد ۱ اور ۲ کو باہم بدلنے سے حاصل ہوتا ہے، اِس لئے اِس کی علامت مثبت ہے۔

۵۰۳۔ پس وہ مقطعہ جس کا جزوِ رئیس ا$_1$ ب$_2$ ج$_3$ د$_4$ .... ہے علامت Σ ± ا$_1$ ب$_2$ ج$_3$ د$_4$ .... سے تعبیر ہوسکتا ہے۔

علامت Σ ± جو جزوِ رئیس کے ماقبل درج کی گئی ہے اِس سے اُن تمام اجزائے ترکیبی کا حاصل جمع مُراد ہے جو اسکے اعداد لاحقہ کو مختلف ترتیبوں سے بدلنے سے حاصل ہو سکتے ہیں جبکہ ہر جزوِ ترکیبی کے ماقبل مناسب علامت درج کی جائے۔

بعض اوقات مقطعہ کو اِس کے جزوِ رئیس کے گرد خطوط وحدانی لکھنے سے اور بھی زیادہ مختصر شکل میں لکھ سکتے ہیں یعنی

(ا$_1$ ب$_2$ ج$_3$ د$_4$ ....)، Σ ± ا$_1$ ب$_2$ ج$_3$ د$_4$ .... کی مزید مختصر شکل ہے

مثال۔ بتاؤ کہ مقطعہ (ا$_۱$ ب$_۲$ ج$_۳$ د$_۴$ ع$_۵$) میں جزوِ ترکیبی ا$_۴$ ب$_۳$ ج$_۱$ د$_۵$ ع$_۲$ کی علامت کیا ہے۔

جزوِ رئیس میں ا اور د کے اعداد کو باہم بدلنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے ا$_۴$ ب$_۲$ ج$_۳$ د$_۱$ ع$_۵$۔ اِس سے ب اور ج کے اعداد بدلنے سے حاصل ہوتا ہے ا$_۴$ ب$_۳$ ج$_۲$ د$_۱$ ع$_۵$، پھر ج اور د کے حروف بدلنے سے حاصل ہوتا ہے ا$_۴$ ب$_۳$ ج$_۱$ د$_۲$ ع$_۵$ اور بالآخر د اور ع کے حروف بدلنے سے حاصل ہوتا ہے ا$_۴$ ب$_۳$ ج$_۱$ د$_۵$ ع$_۲$ جو مفروضہ جزوِ ترکیبی ہے۔ چونکہ ہم نے ترتیب اعداد کو چار مرتبہ بدلا ہے اِس لئے اِس جزوِ ترکیبی کی علامت مثبت ہے۔

۵۰۴۔ اگر دفعہ ۵۰۱ میں اجزائے افرادی ب$_۱$، ج$_۱$،.....، ک$_۱$ میں سے ہر ایک صفر ہو تو مقطعہ مذکور ا$_۱$ ا$'_۱$ کے مساوی رہ جاتا ہے، یعنی بالفاظِ دیگر یہ ا$_۱$ اور ایک (ن - ۱) ویں رُتبہ کے مقطعہ کے مساوی ہے، اِس سے ہم ذیل کا عام مسئلہ مستنبط کرتے ہیں۔

اگر ن ویں رُتبہ کے ایک مقطعہ میں پہلی قطار یا ستون کا ہر ایک جزوِ افرادی سوائے پہلے کے صفر ہو تو یہ مقطعہ اِس جزوِ افرادی اور اُس (ن - ۱) ویں رُتبہ کے مقطعہ کے حاصل ضرب کے مساوی ہوگا جو اول الذکر جزوِ افرادی میں سے گذرنے والے ستون اور قطار کو حذف کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

نیز چونکہ قطاروں کے اور ستونوں کے مناسب تبادلہ سے کوئی سا جزوِ افرادی پہلے مقام پر لایا جا سکتا ہے اس سے ظاہر ہے کہ اگر کسی قطار یا ستون کے سب اجزائے افرادی سوائے ایک کے صفر ہوں تو مقطعہ اِس سے نچلے رُتبہ کے مقطعہ میں نہایت آسانی سے تحلیل کیا جا سکتا ہے۔

یہ امر بعض اوقات مقطعات کے اختصار کے لئے نہایت کارآمد ہوتا ہے۔

مثال۔ مقطعہ ذیل کی قیمت معلوم کرو:۔

$$\begin{vmatrix} ۳۸ & ۲۰ & ۱۱ & ۳۰ \\ ۹ & ۰ & ۳ & ۶ \\ ۳ & ۳۶ & -۲ & ۱۱ \\ ۲۲ & ۱۷ & ۶ & ۱۹ \end{vmatrix}$$

پہلے ستون کے ہرایک جزوِ افرادی میں سے دُوسرے ستون کے متناظرِ جزوِ افرادی کا دُگنا تفریق کرو، نیز چوتھے ستون کے ہر ایک جزوِ افرادی میں سے دُوسرے ستون کے متناظر جزوِ افرادی کا تین گنا تفریق کرو، اِس طرح سے ہمیں حاصل ہوتا ہے:۔

$$\begin{vmatrix} ۵ & ۲۰ & ۱۱ & ۸ \\ ۰ & ۰ & ۳ & ۰ \\ ۹ & ۳۶ & -۲ & ۱۵ \\ ۴ & ۱۷ & ۱۶ & ۷ \end{vmatrix}$$

اور چونکہ دُوسری قطار کے سب اجزائے افرادی سوائے ایک کے صفر ہیں۔ اس لئے مقطعہ بالا

$$= ۳\times\begin{vmatrix} ۵ & ۲۰ & ۸ \\ ۹ & ۳۶ & ۱۵ \\ ۴ & ۱۷ & ۷ \end{vmatrix} = ۳\times\begin{vmatrix} ۵ & ۲۰ & ۸ \\ ۵ & ۱۹ & ۸ \\ ۴ & ۱۷ & ۷ \end{vmatrix}$$

$$= ۳\times\begin{vmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۵ & ۱۹ & ۸ \\ ۴ & ۱۷ & ۷ \end{vmatrix} = -۳\begin{vmatrix} ۵ & ۸ \\ ۴ & ۷ \end{vmatrix} = ۹$$

۵۰۵۔ ذیل کی مثالوں میں جو ترکیبیں استعمال کی گئی ہیں وہ بعض اوقات بڑی مفید ثابت ہوئی ہیں:

مثال ۱۔ ثابت کرو کہ

$$\begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ب} & \text{ج} & \text{د} \\ \text{ب} & \text{ا} & \text{د} & \text{ج} \\ \text{ج} & \text{د} & \text{ا} & \text{ب} \\ \text{د} & \text{ج} & \text{ب} & \text{ا} \end{vmatrix} = (\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} + \text{د})(\text{ا} - \text{ب} + \text{ج} - \text{د})(\text{ا} - \text{ب} - \text{ج} + \text{د})(\text{ا} + \text{ب} - \text{ج} - \text{د})$$

سب قطاروں کو جمع کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ (ا + ب + ج + د) مقطعہ مذکور کا ایک جزوِ ضربی ہے۔ پہلی اور تیسری قطاروں کو جمع کرنے اور حاصل جمع سے دوسری اور چوتھی قطاروں کے حاصل جمع کو تفریق کرنے سے ظاہر ہے کہ ا - ب + ج - د بھی ایک جزوِ ضربی ہے۔ اسی طرح سے یہ بھی بتایا جا سکتا ہے کہ ا - ب - ج + د اور ا + ب - ج - د بھی اجزائے ضربی ہیں۔ بقیہ جزوِ ضربی صرف عددی ہے اور ا^4 والی رقموں کا مقابلہ کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ یہ عددی جزوِ ضربی ۱ ہے، پس نتیجہ مطلوبہ آسانی سے حاصل ہو سکتا ہے۔

مثال ۲ - ثابت کرو کہ

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \text{ا} & \text{ب} & \text{ج} & \text{د} \\ \text{ا}^2 & \text{ب}^2 & \text{ج}^2 & \text{د}^2 \\ \text{ا}^3 & \text{ب}^3 & \text{ج}^3 & \text{د}^3 \end{vmatrix} = (\text{ا} - \text{ب})(\text{ا} - \text{ج})(\text{ا} - \text{د})(\text{ب} - \text{ج})(\text{ب} - \text{د})(\text{ج} - \text{د})$$

اگر ا = ب تو پہلا اور دوسرا ستون متماثل ہو جاتے ہیں اور مقطعہ بالا صفر ہو جاتا ہے۔ پس (ا - ب) مقطعہ مذکور کا ایک جزوِ ضربی ہے (دیکھو دفعہ ۵۱۴)
اسی طرح باقی جملات (ا - ج)، (ا - د)، (ب - ج)، (ب - د)، (ج - د) میں سے ہر ایک جملہ جزوِ ضربی ہے، ان اجزائے ضربی کا حاصل ضرب چھ ابعاد کا ہے اور چونکہ مقطعہ زیرِ بحث بھی چھ ابعاد کا ہے اس لئے باقی جزوِ ضربی محض عددی ہوگا۔ نیز $\text{ب}\,\text{ج}^2\,\text{د}^3$ والی رقوم کا مقابلہ کرنے سے ظاہر ہے کہ یہ عددی جزوِ ضربی ۱ ہے۔ پس نتیجہ مطلوبہ حاصل ہوتا ہے

امثلہ نمبری ۳۳ (ب)

ذیل کے مقطعات کی قیمتیں محسوب کرو۔

۱۔

۱	۱	۱	۱
۱	۲	۳	۴
۱	۳	۶	۱۰
۱	۴	۱۰	۲۰

۲۔

۷	۱۳	۱۰	۶
۵	۹	۷	۴
۸	۱۲	۱۱	۷
۴	۱۰	۶	۳

۳۔

ا	۱	۱	۱
۱	ا	۱	۱
۱	۱	ا	۱
۱	۱	۱	ا

۴۔

۰	۱	۱	۱
۱	ب + ج	ا	ا
۱	ب	ج + ا	ب
۱	ج	ج	ا + ب

۵۔

۳	۲	۱	۴
۱۵	۲۹	۲	۱۴
۱۶	۱۹	۳	۱۷
۳۳	۳۹	۸	۳۸

۶۔

۱ + ا	۱	۱	۱
۱	۱ + ب	۱	۱
۱	۱	۱ + ج	۱
۱	۱	۱	۱ + د

۷۔

۰	ل	م	ی
ل	۰	ی	م
م	ی	۰	ل
ی	م	ل	۰

۸۔

۰	ل	م	ی
-ل	۰	ج	ب
-م	-ج	۰	ا
-ی	-ب	-ا	۰

۹۔

ا	ب	ج	د
ا	ا + ب	ا + ب + ج	ا + ب + ج + د
ا	۲ا + ب	۳ا + ۲ب + ج	۴ا + ۳ب + ۲ج + د
ا	۳ا + ب	۶ا + ۳ب + ج	۱۰ا + ۶ب + ۳ج + د

۱۰۔ اگر ا کا ایک جذر الکعب ω ہو تو ثابت کرو کہ

$$\begin{vmatrix} ۱ & س & س^{۲} & س^{۳} \\ س & س^{۲} & س^{۳} & ۱ \\ س^{۲} & س^{۳} & ۱ & س \\ س^{۳} & ۱ & س & س^{۲} \end{vmatrix} \text{ کا مربع } = \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & -۲ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & -۲ \\ -۲ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & -۲ & ۱ & ۱ \end{vmatrix}$$

اور اس سے حاصل کرو کہ دائیں جانب کے مقطعہ کی قیمت $۳^{۳}\sqrt{-۳}$ ہے۔

۱۱- اگر $(ف^{۲} - ب ج) لا + (ج ھ - ف گ) ما + (ب گ - ھ ف) ی = ۰$

$(ج ھ - ف گ) لا + (گ^{۲} - ج ا) ما + (ا ف - گ ھ) ی = ۰$

$(ب گ - ھ ف) لا + (ا ف - گ ھ) ما + (ھ^{۲} - ا ب) ی = ۰$

تو ثابت کرو کہ

$$ا ب ج + ۲ ف گ ھ - ا ف^{۲} - ب گ^{۲} - ج ھ^{۲} = ۰$$

معادلات ذیل کو حل کرو۔

۱۲-
$$لا + ما + ی = ۱$$
$$ا لا + ب ما + ج ی = ک$$
$$ا^{۲} لا + ب^{۲} ما + ج^{۲} ی = ک^{۲}$$

۱۳-
$$ا لا + ب ما + ج ی = ک$$
$$ا^{۲} لا + ب^{۲} ما + ج^{۲} ی = ک^{۲}$$
$$ا^{۳} لا + ب^{۳} ما + ج^{۳} ی = ک^{۳}$$

۱۴-
$$لا + ما + ی + ع = ۱$$
$$ا لا + ب ما + ج ی + د ع = ک$$
$$ا^{۲} لا + ب^{۲} ما + ج^{۲} ی + د^{۲} ع = ک^{۲}$$
$$ا^{۳} لا + ب^{۳} ما + ج^{۳} ی + د^{۳} ع = ک^{۳}$$

۱۵- ثابت کرو کہ

$$\begin{vmatrix} ب + ج - ا - د & ب ج - ا د & ب ج (ا + د) - ا د (ب + ج) \\ ج + ا - ب - د & ج ا - ب د & ج ا (ب + د) - ب د (ج + ا) \\ ا + ب - ج - د & ا ب - ج د & ا ب (ج + د) - ج د (ا + ب) \end{vmatrix}$$
$$= -۲ (ب - ج)(ج - ا)(ا - ب)(ا - د)(ب - د)(ج - د)$$

۱۶- ثابت کرو کہ

$$\begin{vmatrix} ا^2 & ا^2 - (ب - ج)^2 & ب\,ج \\ ب^2 & ب^2 - (ج - ا)^2 & ج\,ا \\ ج^2 & ج^2 - (ا - ب)^2 & ا\,ب \end{vmatrix} = (ب - ج)(ج - ا)(ا - ب)(ا + ب + ج)(ا^2 + ب^2 + ج^2)$$

۱۷۔ ثابت کروکہ

$$\begin{vmatrix} ا & ب & ج & د & ع & ف \\ ف & ا & ب & ج & د & ع \\ ع & ف & ا & ب & ج & د \\ د & ع & ف & ا & ب & ج \\ ج & د & ع & ف & ا & ب \\ ب & ج & د & ع & ف & ا \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} اَ & بَ & جَ \\ جَ & اَ & بَ \\ بَ & جَ & اَ \end{vmatrix}$$

جہاں $اَ = ا^2 - د^2 + 2\,ج\,ع - 2\,ب\,ف$

$بَ = ع^2 - ب^2 + 2\,ا\,ج - 2\,د\,ف$

$جَ = ج^2 - ف^2 + 2\,ا\,ع - 2\,ب\,د$

۱۸- اگرایک مقطعہ ن ویں رتبہ کا ایسا ہوکہ اِس کی پہلی، دوسری، تیسری ...... ن ویں قطاروں کے اجزائے افرادی بالترتیب پہلے، دوسرے، تیسرے .... ن ویں مرتبہ کے اعداد متشکلہ ہوں تو ثابت کروکہ مقطعہ کی قیمت ا کے مساوی ہے۔

چونتیسواں باب

متفرق مسائل و امثلہ

۵۰۶۔ ہم اس باب کے شروع میں صورت جبریہ کے قیام کے متعلق چند باتیں درج کریں گے اور اس اثناء میں چند دیگر اساسی کلیات کی نظر ثانی کریں گے جو پیشتر ازیں ثابت کئے جا چکے ہیں۔

۵۰۷۔ جبریہ اصولوں کی بحث میں ہمیشہ تحلیلی طرز عمل سے کام لیا جاتا ہے شروع میں ہی ہم نئے نئے نام اور قواعد مندرج نہیں کرتے بلکہ مجرد اعداد کے حساب کے متعلق اپنی معلومات کی مدد سے پہلے چند ایسے عمل اور کلیات ثابت کرتے ہیں جنکی تصدیق ہر مخصوص صورت میں نہایت آسانی سے ہوسکتی ہے ان اعمال کے عام نظریہ کو ہی درحقیقت جبر و مقابلہ سے موسوم کیا جاتا ہے۔ اس اختلاف کی بناپر جبر و مقابلہ کی بعض اوقات دو قسمیں قرار دی جاتی ہیں۔ حسابی جبر و مقابلہ اور علامتی جبر و مقابلہ۔ اول الذکر قسم میں پہلے ہم اپنی علامتوں کو وہ معنی دیتے ہیں جو از روئے حساب بخوبی سمجھ میں آسکیں اور ان سے اعمال کے اساسی قوانین مستنبط کرتے ہیں۔ آخر الذکر قسم میں ہم پہلے یہ مان لیتے ہیں کہ حسابی الجبرا کے قوانین تمام صورتوں میں درست ہیں خواہ ان میں کی علامتوں کی نوعیت کچھ ہی ہو اور پھر یہ دریافت کرتے ہیں کہ ان علامات کو کیا معنی پہنائے جائیں کہ یہ اُن قوانین کے ماتحت رہیں۔ پس جوں جوں ہم معمولی حساب کی حدود سے نکل کر اوپر چڑھتے جاتے ہیں نئے نئے نتیجے نکلتے آتے ہیں۔ نئے نئے الفاظ استعمال کرنے پڑتے ہیں اور علامتوں کو ایسے معنی دینے پڑتے ہیں جو ابتدائی تعریفات میں مضمر نہ تھے۔ نیز جس طریقہ سے الجبرا کے عام کلیات منضبط

ہوتے ہیں۔ اُس کی رُو سے اِن کی عمومیت اور قیام کے متعلق ہمارے ذہن میں وثوق رہتا ہے خواہ وہ مقادیر جن پر اِن ضوابط کا اطلاق ہو از رُوئے حساب سمجھ میں نہ آسکیں۔

۵۰۸۔ اگر ہم اپنی توجہ کو محض علامات کی مثبت صحیح قیمتوں تک محدود رکھیں تو ذیل کے کلیات حساب کی ابتدائی تعریفات کی رُو سے بآسانی ثابت ہوسکتے ہیں۔

۱۔ قانونِ مبادلہ جسکو ہم ذیل کے الفاظ میں بیان کرتے ہیں۔

(۱) جمع اور تفریق کا عمل کسی ترتیب میں ہوسکتا ہے۔

مثلاً ا + ب - ج = ا - ج + ب = ب - ج + ا

(۲) ضرب اور تقسیم کا عمل کسی ترتیب میں ہوسکتا ہے۔

مثلاً ا × ب = ب × ا

ا × ب × ج = ب × ج × ا = ا × ج × ب وغیرہ

ا ب ÷ ج = ا × ب ÷ ج = (ا ÷ ج) × ب = (ب ÷ ج) × ا

۱۔ کلیۂ تقسیم جس کو ہم ذیل کے الفاظ میں بیان کرتے ہیں: ضرب یا تقسیم کے عمل جمع یا تفریق کے عملوں پر پھیلائے جاسکتے ہیں۔

(ا - ب + ج) م = ا م - ب م + ج م

(ا - ب)(ج - د) = ا ج - ا د - ب ج + ب د

[دیکھو ابتدائی الجبرا دفعات ۳۳ اور ۳۴]

اور چونکہ تقسیم کا عمل محض ضرب کے عمل کا اُلٹ ہے اِس لئے تقسیم کے متعلق کلیۂ تقسیم جُداگانہ بحث کا محتاج نہیں۔

۳۔ کلیاتِ قوت نما

(۱) $ا^م × ا^ن = ا^{م+ن}$

$ا^م ÷ ا^ن = ا^{م-ن}$

(۲) $(ا^م)^ن = ا^{م ن}$

[دیکھو ابتدائی الجبرا دفعات ۲۳۳ تا ۲۳۵]

ان قوانین کو جو اوپر مندرج ہوئے نفس مضمون کی بنیاد سمجھنا چاہیئے۔ اور یہ سب اِس مفروضہ کی بنا پر ثابت کئے جا چکے ہیں کہ استعمال شدہ رموز یا علامات مثبت صحیح عدد ہیں اور ان کا استعمال صرف ایسے اعمال تک محدود ہے جو از رُوئے حساب با معنی ہیں۔ اگر یہ شرائط پوری نہ ہوں تو علامتی جبر و مقابلہ کی رُو سے ہم مان لیتے ہیں کہ حسابی جبر و مقابلہ کے قوانین ہر صورت میں بر قرار رہتے ہیں اور اس مفروضہ کی بنا پر جو معنی ان قوانین سے مستنبط ہوں اُن کو درست تصور کرتے ہیں۔ اس طرح سے اس امر کی توثیق ہو جاتی ہے کہ جبریہ اعمال کے قوانین ہر صورت میں درست ہیں اور ان کی وسیع اور عام صورت میں معمولی حساب کے قوانین کی مخصوص صورتیں بھی شامل ہیں۔

۵۰۹ - **قانون مبادلہ** سے ہم خطوط وحدانی کے ادخال و اخراج کے قواعد مستنبط کرتے ہیں (دیکھو ابتدائی جبر و مقابلہ دفعات ۲۱، ۲۲) اور ان قواعد کی مدد سے ہم قانونِ تقسیم کو بموجب دفعہ ۳۵ ثابت کرتے ہیں۔ مثلاً یہ ثابت کیا جا چکا ہے کہ

$$(ا - ب)(ج - د) = اج - اد - ب ج + ب د$$

جبکہ ا، ب، ج، د مثبت صحیح عدد ہیں اور ا بڑا ہے ب سے اور ج بڑا ہے د سے۔ اب اگر ان علامات پر سے تمام قیود اُٹھا دی جائیں تو یہ معلوم کرنا کہ اس صورت میں نتائج مذکورہ کے کیا معنی ہونگے علامتی جبر و مقابلہ سے متعلق ہے۔ پس ا = ۰ اور ج = ۰ رکھنے سے حاصل ہوتا ہے $(-ب) \times (-ج) = ب ج$ یعنی دو منفی مقداروں کا حاصلِ ضرب مثبت ہوتا ہے۔ نیز ب = ۰ اور ج = ۰ رکھنے سے $ا \times (-د) = -اد$ یعنی مختلف العلامت مقادیر کا حاصل ضرب منفی ہوتا ہے۔

اسی طرح کلیۂ تقسیم کے نتیجہ سے ہمیں فوراً قانونِ علامات حاصل ہو جاتا ہے۔ اور آیندہ کے لئے قانونِ علامات بھی ہمارے مسلمہ اور اساسی قوانین میں سے شمار ہونے لگتا ہے۔

۵۱۰ - جبریہ کسور کے خواص کو ثابت کرنے کے لئے جس طریقہ سے اساسی

قوانین سے کام لیا جاتا ہے اُس کے متعلق طالب علم اگر چاہے تو ابتدائی الجبرا کے ابواب ۱۹، ۲۰ اور ۲۱ کا مطالعہ کر سکتا ہے۔ یہ معلوم ہوگا کہ جن رموز اور اعمال کو بظاہر کوئی راست یا ابتدائی مفہوم پہنانا ممکن نہیں اُنکی تعبیر اسطور پر کی جاتی ہے کہ وہ حسابی جبرومقابلہ کے قوانین کے مطابق ہو جائیں۔

۵۱۱- قوت نماؤں کے کلیہ پر ابتدائی جبرومقابلہ کے تیسویں باب میں مفصل بحث کی جاچکی ہے جب م اور ن مثبت صحیح اعداد ہوں اور م > ن تو ہم براہِ راست قوت نما کی تعریف سے ثابت کرتے ہیں کہ

$$ا^{م} \times ا^{ن} = ا^{م+ن}،\quad ا^{م} \div ا^{ن} = ا^{م-ن}،\quad (ا^{م})^{ن} = ا^{من}$$

اس کے بعد ہم مان لیتے ہیں کہ ان میں سے پہلا ضابطہ صحیح رہتا ہے جبکہ قوت نماؤں پر سے تمام قیود ہٹالی جائیں اور اس طرح پر اُن رموز کے لئے جن پر ہماری ابتدائی تعریف کا اطلاق نہیں ہوتا ہم معنی اور مفہوم تجویز کرنیکی کوشش کرتے ہیں اسطرح سے $ا^{\frac{ق}{ت}}$، $ا^{۰}$، $ا^{-ن}$ کے لئے جو مفہوم حاصل ہوتے ہیں وہ باقی کے دو قوانین کے عین مطابق ہیں، پس آیندہ کے لئے قوت نماؤں کے کلیہ کو پوری عمومیت اور کامل موافقت کے ساتھ استعمال کیا جا سکتا ہے۔

۵۱۲- باب ہشتم میں ہم نے علامت خ یا $\sqrt{-۱}$ کی تعریف یوں کی تھی کہ یہ ربط $خ^{۲} = -۱$ کو پورا کرتا ہے۔ اِس تعریف سے اور نیز خ کو جبرومقابلہ کے عام ضوابط کے ماتحت لانے سے ہم ا + خ ب کی شکل کے جملات کے خواص پر بحث کر سکتے ہیں۔ ا + خ ب کو جس میں حقیقی اور خیالی مقادیر ملی ہوتی ہیں بعض اوقات ملتف اعداد سے موسوم کرتے ہیں۔ دفعات ۹۲ تا ۱۰۵ کی رُو سے دیکھا جا سکتا ہے کہ اگر ہم کسی ملتف عدد پر جمع، تفریق، ضرب یا تقسیم کا عمل کریں تو جواب بالعموم خود ایک ملتف عدد ہوگا۔ نیز چونکہ کسی منطق تفاعل پر مندرجہ بالا اعمال کے سوائے کوئی اور عمل نہیں کیا جاتا اِس لئے ظاہر ہے کہ کسی ملتف عدد کا کوئی منطق تفاعل بھی ملتف عدد ہوتا ہے۔ $ا^{لا+خ ما}$، لوگ (لا + خ ما) وغیرہ کی شکل کے جملوں پر علم مثلث کے بغیر مفصل بحث نہیں کی جا سکتی۔ لیکن

ڈی مائیور[1] کے مسئلہ سے بہ آسانی ثابت ہو سکتا ہے کہ ایسے تفاعل ا + خ ب کی شکل کے ایک ملتف عدد میں تحویل ہو سکتے ہیں۔

جملہ $و^{لا + خ ما}$ زیادہ عام شکل کے جملہ $ا^{لا + خ ما}$ میں شامل ہے لیکن اس پر بحث کرنے کا ایک اور طریقہ قابل توجہ ہے۔

دفعہ ۲۲۰ میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ اگر لا کوئی حقیقی مقدار ہو تو

$$و^{لا} = \text{نہا} \left(۱ + \frac{لا}{ن}\right)^{ن}$$ جبکہ ن مائل بہ لا تناہی ہو

مقدار $و^{لا + خ ما}$ کی تعریف بھی حسب مساوات ذیل

$$و^{لا + خ ما} = \text{نہا} \left(۱ + \frac{لا + خ ما}{ن}\right)^{ن}$$ جب کہ ن لا تناہی پر سے ہو سکتی ہے۔

جس میں لا اور ما حقیقی مقداریں ہیں۔

ملتف اعداد کے نظریہ کی نشو و نما پر شلملک[2] کی کتاب "ہینڈ بک آف الجبریکن انیلیسس" کے ابواب ۱۰، ۱۱ میں مفصل بحث کی گئی ہے۔

۵۱۳۔ ایسے ان طریقوں کی توضیح کے لئے جو مساواتوں کے نظریہ میں اور کئی متماثلات کے ثابت کرنے میں مفید ثابت ہونگے چند مسائل اور امثلہ ذیل میں درج کرتے ہیں۔

۵۱۴۔ اگر لا کے کسی منطق صحیح تفاعل کو لا - ا پر تقسیم کیا جائے تو بتاؤ کہ باقی کیا بچے گی۔

فرض کرو کہ ف (لا)، لا کا کوئی منطق صحیح تفاعل ہے، ف (لا) کو لا - ا پر تقسیم کرو تاوقتیکہ ایسی باقی نکل آئے جس میں لا شامل نہ ہو۔ فرض کرو کہ ق خارج قسمت اور ب باقی ہے۔

$$\text{تب}\quad ف (لا) = ق (لا - ا) + ب$$

چونکہ ب میں لا شامل نہیں ہے اس لئے اس کی قیمت میں کوئی تبدیلی نہ ہوگی خواہ ہم لا کو کوئی قیمت دیں، لا = ا رکھو تب

$$ف (ا) = ق \times ۰ + ب$$

---

[1] De Moivre　　[2] Schlömilch

اب لا کی محدود قیمتوں کے لئے ق کی قیمت محدود ہوتی ہے

اس لئے ب = ف (ا)

نتیجہ صریح - اگر ف (لا) پورا تقسیم ہو جائے لا - ا پر تو ب = ۰

یعنی ف (ا) = ۰، پس اگر لا کا ایک منطق صحیح تفاعل صفر ہو جائے جبکہ لا = ا تو یہ لا - ا پر پورا تقسیم ہو جاتا ہے -

۵۱۵ - دفعۂ ما قبل کا مسئلہ اس قدر ضروری ہے کہ ہم اس کا ایک اور ثبوت ذیل میں درج کرتے ہیں، اس ثبوت میں، مزید فائدہ یہ ہے کہ اثنائے عمل میں خارج قسمت کی شکل بھی حاصل کیجاتی ہے -

فرض کرو کہ تفاعل ن ابعاد کا ہے اور

$$ف_{۰}لا^{ن} + ف_{۱}لا^{ن-۱} + ف_{۲}لا^{ن-۲} + ف_{۳}لا^{ن-۳} + \dots\dots + ف_{ن}$$

سے تعبیر ہوتا ہے، تب خارج قسمت (ن - ۱) ابعاد کا تفاعل ہوگا، اس کو

$$ق_{۰}لا^{ن-۱} + ق_{۱}لا^{ن-۲} + ق_{۲}لا^{ن-۳} + \dots\dots\dots\dots ق_{ن-۱}$$

سے تعبیر کرو - اب اگر باقی جس میں لا شامل نہ ہو ب ہو تو ظاہر ہے کہ

$$ف_{۰}لا^{ن} + ف_{۱}لا^{ن-۱} + ف_{۲}لا^{ن-۲} + ف_{۳}لا^{ن-۳} + \dots\dots\dots + ف_{ن}$$

$$= (لا - ا)\{ق_{۰}لا^{ن-۱} + ق_{۱}لا^{ن-۲} + ق_{۲}لا^{ن-۳} + \dots\dots + ق_{ن-۱}\} + ب$$

ضرب دینے اور لا کی یکساں قوتوں کے سروں کو مساوی رکھنے سے

$$ق_{۰} = ف_{۰}$$

$$ق_{۱} - اق_{۰} = ف_{۱} \quad \text{یعنی} \quad ق_{۱} = اق_{۰} + ف_{۱}$$

$$ق_{۲} - اق_{۱} = ف_{۲} \quad \text{یعنی} \quad ق_{۲} = اق_{۱} + ف_{۲}$$

$$ق_{۳} - اق_{۲} = ف_{۳} \quad \text{یعنی} \quad ق_{۳} = اق_{۲} + ف_{۳}$$

....

$ب - اق_{ن-۱} = ف_ن$ یعنی $ب = اق_{ن-۱} + ف_ن$

اس سے ظاہر ہے کہ خارج قسمت کے متواتر سر اس طرح بنتے ہیں۔ خارج قسمت کی رقم ما قبل کے سر کو ا سے ضرب دو اور مقسوم میں اگلی رقم کا جو سر ہے اس کو اس حاصل ضرب میں جمع کر دو۔ خارج قسمت کی متواتر رقوم اور باقی کے بنانے کا عمل ذیل کی ترتیب سے واضح ہو سکتا ہے۔

$ف_۰$	$ف_۱$	$ف_۲$	$ف_۳$	...... $ف_{ن-۱}$	$ف_ن$
	$اق_۰$	$اق_۱$	$اق_۲$	$اق_۳$ ...... $اق_{ن-۲}$	$اق_{ن-۱}$
$ق_۰$	$ق_۱$	$ق_۲$	$ق_۳$	$ق_{ن-۱}$	ب

پس $ب = اق_{ن-۱} + ف_ن = ا(اق_{ن-۲} + ف_{ن-۱}) + ف_ن = ...$

$= ف_۰ ا^ن + ف_۱ ا^{ن-۱} + ف_۲ ا^{ن-۲} + ... + ف_ن$

اگر مقسوم علیہ لا + ا ہو تو بھی یہ طریقہ استعمال ہو سکتا ہے لیکن اس صورت میں ضارب ا کی بجائے − ا ہوگا۔

مثال۔ اگر $۳ لا^۷ - لا^۶ + ۳۱ لا^۴ + ۲۱ لا + ۵$ کو لا + ۲ پر تقسیم کیا جائے تو خارج قسمت اور باقی معلوم کرو۔

یہاں ضارب − ۲ ہے، لہذا

۳	۱−	۰	۳۱	۰	۰	۲۱	۵
	۶−	۱۴	۲۸−	۶−	۱۲	۲۴−	۶
۳	۷−	۱۴	۳	۶−	۱۲	۳−	۱۱

پس خارج قسمت $۳ لا^۶ - ۷ لا^۵ + ۱۴ لا^۴ + ۳ لا^۳ - ۶ لا^۲ + ۱۲ لا - ۳$ ہے اور باقی ۱۱ ہے۔

۱۶۵۔ مشق ما قبل میں اختصار کی خاطر مختلف رقوم کے صرف سر درج کئے گئے ہیں اور

لا کی جن قوتوں کی رقمیں موجود نہیں اُن کے سروں کی بجائے صفر لکھے گئے ہیں **منفردہ سروں** کے استعمال کا یہ طریقہ اکثر اوقات ابتدائی جبریہ اعمال میں خاص طور پر جبکہ تفاعل منطق صحیح ہوں بہت سی زحمت بچانے کے لئے استعمال کیا جا سکتا ہے۔ ذیل میں ایک اور مثال درج کی جاتی ہے۔

مثال۔ ۳لا^{۵} − ۸لا^{۴} − ۵لا^{۳} + ۲۶لا^{۲} − ۳۳لا + ۲۶ کو لا^{۳} − ۲لا^{۲} − ۴لا + ۸ پر تقسیم کرو۔

۱ + ۲ + ۴ − ۸) ۳ − ۸ − ۵ + ۲۶ − ۳۳ + ۲۶ (۳ − ۲ + ۳
۳ + ۶ + ۱۲ − ۲۴
―――――――――
− ۲ + ۷ + ۲ − ۳۳
− ۲ − ۴ − ۸ + ۱۶
―――――――――
۳ − ۶ − ۱۷ + ۲۶
۳ + ۶ + ۱۲ − ۲۴
―――――――――
− ۵ + ۲

پس خارج قسمت ۳لا^{۲} − ۲لا + ۳ ہے اور باقی − ۵لا + ۲

یہ بات قابلِ غور ہے کہ مقسوم علیہ میں پہلی رقم کے سوائے باقی سب رقموں کی علامتیں بدل دی گئی ہیں، اِس کا نتیجہ یہ ہوتا ہے کہ عمل کی متواتر منزلوں پر ہم تفریق کے عمل کی بجائے جمع کا عمل کر سکتے ہیں۔

۱۷۵۔ ذیل کی ترتیب سے عمل اور بھی مختصر ہو جاتا ہے، اِس طریقہ کو ہارنر کا ترکیبی تقسیم کا طریقہ کہتے ہیں۔

۱ | ۳ − ۸ − ۵ + ۲۶ − ۳۳ + ۲۶
۲ | ۶ + ۱۲ − ۲۴
۴ | − ۴ − ۸ + ۱۶
−۸ | + ۶ + ۱۲ − ۲۴
―――――――――
۳ − ۲ + ۳ + ۰ − ۵ + ۲

[تشریح۔ انتصابی خط کے دائیں طرف کے اعداد کا ستون مقسوم علیہ کے سروں پر مشتمل ہے جن کی علامتوں کو سوائے پہلے سر کی علامت کے بدل دیا جاتا ہے۔ دوسری

اُفقی قطار بالترتیب ۲، ۴، ۱- ۸ کو ۳ سے جو خارج قسمت کی پہلی رقم ہے ضرب دینے سے حاصل کی جاتی ہے۔ پھر انتصابی خط کے بائیں طرف جو عددوں کا دوسرا ستون ہے اس کو جمع کرتے ہیں۔ اِس سے ہمیں ۲- ملتا ہے جو خارج قسمت کی دُوسری رقم کا سر ہے پھر اس محصلہ عدد ۲ کو انتصابی خط کے دائیں طرف کے اعداد (۲، ۴، -۸) سے ضرب دیکر تیسری اُفقی قطار حاصل کرتے ہیں، اور تیسرے ستون کو جمع کرتے ہیں، جس سے ۳ حاصل ہوتا ہے جو خارج قسمت کی تیسری رقم کا سر ہے اور علیٰ ہٰذالقیاس ستونوں کو جمع کرنے سے ہمیں باقی کی رقموں کے سر حاصل ہوتے ہیں]

مثال- ۶ا۵ + ۵ ا۴ب - ۸ ا۳ب۲ - ۶ ا۲ب۳ - ۶ اب۴ کو ۲ ا۲ + ۳ اب - ب۲ پر تقسیم کرنے سے خارج قسمت کی چار رقمیں حاصل کرو۔

	۶ + ۵ . - ۸ - ۶ - ۶ -	۲
	۹- + ۰ + ۳	۳-
	۶ + ۰ - ۲	۰
۱-	۳ + ۰	۱
۴ - ۰ + ۱۲		
۴ - ۰ + ۱۱ +	۳ - ۲ - ۱ + ۰ - ۴	

پس مطلوبہ خارج قسمت ۳ ا۳ - ۲ ا۲ب - اب۲ - ۴ ا-۱ب۴ ہے اور باقی ۱۱ ب۵ - ۴ ا-۲ ب۶ ہے۔

یہاں ہم مسلسل ستونوں کی رقموں کو حسب سابق جمع کرتے ہیں لیکن ہر ایک مجموعہ کو ۲ پر جو مقسوم علیہ کی پہلی رقم کا سر ہے تقسیم کرتے ہیں، جب خارج قسمت میں رقموں کی مطلوبہ تعداد حاصل ہو جاتی ہے تو باقی ماندہ ستونوں کو محض جمع کرنے سے باقی حاصل ہو جاتی ہے، جہاں موخرالذکر ستونوں کے حاصل جمع کو مقسوم علیہ کی پہلی رقم میں ۲ پر تقسیم نہیں کیا جاتا۔

طالب علم منفردہ سروں کے طریقہ سے تقسیم کا عمل کر کے اس نتیجہ کی آسانی سے تصدیق کر سکتا ہے۔

۵۱۸- دفعہ ۵۱۴ کا اصول جبریہ متماثلات کے ثابت کرنے میں نہایت

کارآمد ہوتا ہے، لیکن اس کی کوئی مثال دینے سے پہلے ہم متشاکل اور متبادل تفاعیل کے متعلق چند امور کا ذکر کر دینا مناسب سمجھتے ہیں۔

اگر ایک تفاعل ایسا ہو کہ اس کے متغیرات کے کسی زوج کو ایک دوسرے سے بدلنے سے تفاعل مذکور میں کوئی تبدیلی واقع نہ ہو تو یہ تفاعل اپنے متغیرات کے لحاظ سے متشاکل کہلاتا ہے۔ مثلاً لا + ما + ی ، لا ما + ما ی + ی لا ، لا^{۳} + ما^{۳} + ی^{۳} - لا ما ی بالترتیب پہلے دوسرے تیسرے درجہ کے متشاکل تفاعل ہیں۔

یہ بات قابل غور ہے کہ درجۂ اول کا تفاعل متشاکل صرف م (لا + ما + ی) کی شکل کا ہو سکتا ہے جہاں م بے تعلق ہو لا، ما، ی سے۔

۵۱۹ - متشاکل تفاعیل کی تعریف سے ہی ظاہر ہے کہ وہ متشاکل جملوں کا مجموعہ، فرق، حاصل ضرب اور خارج قسمت سب متشاکل ہونگے۔ اس اصول کو ذہن میں رکھنے سے جبریہ عمل کی صحت کو جانچنے کے لئے بعض اوقات بڑی آسانی ہوتی ہے اور بعض صورتوں میں ہم طویل عملوں کی زحمت سے بچ جاتے ہیں۔

مثلاً ہم جانتے ہیں کہ (لا + ما + ی)^{۳} کی تفصیل درجۂ سوم کا ایک متجانس جملہ ہوگی اور اس لئے اس کی شکل لا^{۳} + ما^{۳} + ی^{۳} + ا (لا^{۲} ما + ما^{۲} ی + لا ما^{۲} + ما ی^{۲} + ی لا^{۲} + ی^{۲} لا) + ب لا ما ی ہوگی جہاں ا، ب ایسی مقادیر ہیں جو لا، ما، ی کے تابع نہیں ہیں۔

رکھو ی = ۰، تب ا = ۳ کیونکہ ا، (لا + ما)^{۳} کی تفصیل میں لا^{۲} ما کا سر ہے،

رکھو لا = ما = ی = ۱ تب ہمیں حاصل ہوتا ہے ۲۷ = ۳ + (۳ × ۶) + ب

یعنی ب = ۶

پس (لا + ما + ی)^{۳} = لا^{۳} + ما^{۳} + ی^{۳} + ۳ لا^{۲} ما + ۳ لا ما^{۲} + ۳ ما^{۲} ی + ۳ ی ما^{۲}
+ ۳ ی^{۲} لا + ۳ ی لا^{۲} + ۶ لا ما ی

۵۲۰ - اگر ایک تفاعل ایسا ہو کہ اس کے متغیرات کے کسی زوج کو باہم بدلنے سے تفاعل کی علامت بدل جائے لیکن اس کی عددی قیمت نہ بدلے تو یہ

تفاعل اپنے متغیرات کے لحاظ سے متبادل کہلاتا ہے۔ مثلاً لا - ما اور

ا^2 (ب - ج) + ب^2 (ج - ا) + ج^2 (ا - ب)

متبادل تفاعل ہیں۔

یہ ظاہر ہے کہ کوئی خطی متبادل تفاعل ایسا نہیں ہوسکتا جس میں دو سے زیادہ متغیر ہوں۔ نیز یہ بھی ظاہر ہے کہ کسی متشاکل تفاعل اور متبادل تفاعل کا حاصلِ ضرب ایک متبادل تفاعل ہوتا ہے۔

۵۲۱ - متشاکل اور متبادل تفاعل صرف ایک رقم لکھنے اور اس رقم کے ماقبل علامت Σ جو حاصل جمع کا اختصار ہے ثبت کرنے سے تعبیر کئے جا سکتے ہیں۔ مثلاً Σ ا سے مراد اُن تمام رقوم کا حاصل جمع ہے جو ا کے نمونہ کی ہیں، Σ اب سے مراد ان تمام رقوم کا حاصل جمع ہے جو اب کے نمونہ کی ہیں، وغیرہ وغیرہ۔ مثلاً اگر تفاعل میں چار حروف ا، ب، ج، د ہوں تو

Σ ا = ا + ب + ج + د

Σ اب = اب + اج + اد + ب ج + ب د + ج د

علیٰ ہذا القیاس

اسی طرح سے اگر کسی تفاعل میں تین حروف ا، ب، ج ہوں تو

Σ ا^2 (ب + ج) = ا^2 (ب + ج) + ب^2 (ج + ا) + ج^2 (ا + ب)

اور Σ ا^2 ب ج = ا^2 ب ج + ب^2 ج ا + ج^2 ا ب　　وغیرہ وغیرہ

یہ بات قابلِ توجہ ہے کہ جب حروف کی تعداد تین ہو تو Σ ا^2 ب تین رقموں پر نہیں بلکہ چھ رقموں پر مشتمل ہے، یعنی

Σ ا^2 ب = ا^2 ب + ا^2 ج + ب^2 ج + ب^2 ا + ج^2 ا + ج^2 ب

علامت Σ حروف کے دو یا زیادہ جوڑوں کے لحاظ سے جمع کے عمل کو تعبیر کرنے کے لئے بھی استعمال ہوسکتی ہے۔ مثلاً

∑ مای (ب − ج) = مای (ب − ج) + بی لا (ج − ا) + لاا (ا − ب)

۵۲۲ — مندرجہ بالا علامت کی مدد سے ہم متشاکل جملات کی قوتوں یا حاصل ضربوں کو نہایت مجمل شکل میں ظاہر کر سکتے ہیں۔ مثلاً

(ا + ب + ج)^۳ = ∑ ا^۳ + ۳ ∑ ا^۲ب + ۶ اب ج

(ا + ب + ج + د)^۳ = ∑ ا^۳ + ۳ ∑ ا^۲ب + ۶ ∑ اب ج

(ا + ب + ج)^۴ = ∑ ا^۴ + ۴ ∑ ا^۳ب + ۶ ∑ ا^۲ب^۲ + ۱۲ ∑ ا^۲ب ج

∑ ا × ∑ ا^۲ = ∑ ا^۳ + ∑ ا^۲ب

مثال ۱ — ثابت کرو کہ

(ا + ب)^۵ − ا^۵ − ب^۵ = ۵ اب (ا + ب) (ا^۲ + اب + ب^۲)

دائیں طرف کے جملہ کو ج سے تعبیر کرو۔ تب ج، ا کا ایک ایسا تفاعل ہے جو ا = ۰ رکھنے سے معدوم ہو جاتا ہے۔ پس ا، ج کا ایک جزوِ ضربی ہے، اسی طرح سے ب، ج کا ایک اور جزوِ ضربی ہے، نیز اگر ا = − ب رکھا جائے تو ج صفر ہو جاتا ہے لہٰذا (ا + ب) ایک جزوِ ضربی ہے ج کا۔ اس لئے ج میں جملہ اب (ا + ب) بطور جزوِ ضربی شامل ہے۔ باقی ماندہ جزوِ ضربی دو ابعاد کا ہوگا اور چونکہ یہ ا اور ب کے لحاظ سے متشاکل ہے اس لئے اس جزوِ ضربی کی شکل اَ ا^۲ + بَ اب + اَ ب^۲ ہوگی۔

پس (ا + ب)^۵ − ا^۵ − ب^۵ = اب (ا + ب) (اَ ا^۲ + بَ اب + اَ ب^۲)۔

جہاں اَ اور بَ منحصر نہیں ہیں ا اور ب پر۔

ا = ۱، ب = ۱ رکھنے سے ۱۵ = ۲ اَ + بَ

ا = ۲، ب = − ۱ رکھنے سے ۱۵ = ۵ اَ − ۲ بَ

حل کرنے سے اَ = ۵، بَ = ۵، لہٰذا مطلوبہ نتیجہ فوراً حاصل ہو جاتا ہے۔

مثال ۲ — (ب^۳ + ج^۳) (ب − ج) + (ج^۳ + ا^۳) (ج − ا) + (ا^۳ + ب^۳) (ا − ب) کے اجزائے ضربی معلوم کرو۔

جملہ بالا کو ع سے تعبیر کرو، تب ع، ا کا ایک تفاعل ہے جو ا = ب رکھنے سے

معدوم ہو جاتا ہے، پس اس کا ایک جزو ضربی (ا - ب) ہے [دیکھو دفعہ ۵۱۴]
اسی طرح سے (ب - ج) اور (ج - ا) بھی اس کے اجزائے ضربی ہیں پس ع میں (ب - ج)(ج - ا)(ا - ب) بطور جزو ضربی کے شامل ہوتا ہے۔

نیز چونکہ ع چوتھے درجہ کا ہے، اس لئے باقی جزوِ ضربی پہلے درجہ کا ہوگا اور چونکہ ع ایک متشاکل تفاعل ہے ا، ب، ج کا اس لئے آخرالذکر جزوِ ضربی م(ا + ب + ج) کی شکل کا ہوگا۔ [دیکھو دفعہ ۵۱۸]

∴ ع = م (ب - ج)(ج - ا)(ا - ب)(ا + ب + ج)۔ م کی قیمت معلوم کرنے کے لئے ہم ا، ب، ج کو کوئی ایسی قیمت دے سکتے ہیں جو ہمیں آسان ترین معلوم ہو، ا = ۱، ب = ۰، ج = ۲ رکھنے سے م = ۱ اور اس سے ہمیں مطلوبہ نتیجہ حاصل ہو جاتا ہے۔

مثال ۳ - ثابت کرو کہ۔

(لا + ما + ی)^{۵} - لا^{۵} - ما^{۵} - ی^{۵} = ۵ (ما + ی)(ی + لا)(لا + ما)(لا^{۲} + ما^{۲} + ی^{۲} + لا ما + لا ی + ما ی)

دائیں جانب کے جملہ کو ع سے تعبیر کرو، تب ع معدوم ہو جاتا ہے جب ما = - ی، پس (ما + ی) ایک جزوِ ضربی ہے ع کا، اسی طرح سے (ی + لا) اور (لا + ما) بھی اجزائے ضربی ہیں۔ لہذا (لا + ما)(ما + ی)(ی + لا) جزوِ ضربی ہے ع کا، نیز چونکہ ع پانچویں درجہ کا جملہ ہے اس لئے باقی جزوِ ضربی دوسرے درجہ کا ہوگا اور چونکہ ع بلحاظ لا، ما، ی کے متشاکل ہے، اسلئے موخرالذکر جزوِ ضربی کی شکل یہ ہوگی۔

ا (لا^{۲} + ما^{۲} + ی^{۲}) + ب (لا ما + ما ی + ی لا)

لا = ما = ی = ۱ رکھنے سے ۱۰ = ا + ب

لا = ۲، ما = ۱، ی = ۰ رکھنے سے ۳۵ = ۵ ا + ۲ ب

حل کرنے سے ا = ب = ۵

پس مطلوبہ نتیجہ فوراً حاصل ہو جاتا ہے۔

۵۲۳ - حوالہ کے لئے ذیل میں ہم ایک فہرست ایسی مساواتِ متماثلہ کی درج کرتے ہیں جو جبریہ جملوں کی تحویل میں کار آمد ہوتی ہیں ان میں سے اکثر ابتدائی الجبرا کے باب ۲۹ میں درج کی جا چکی ہیں۔

Σ ب ج (ب - ج) = - (ب - ج)(ج - ا)(ا - ب)

Σ ا^{2}(ب - ج) = - (ب - ج)(ج - ا)(ا - ب)

Σ ا(ب^{2} - ج^{2}) = (ب - ج)(ج - ا)(ا - ب)

Σ ا^{3}(ب - ج) = - (ب - ج)(ج - ا)(ا - ب)(ا + ب + ج)

ا^{3} + ب^{3} + ج^{3} - ۳ ا ب ج = (ا + ب + ج)
(ا^{2} + ب^{2} + ج^{2} - ب ج - ج ا - ا ب)

آخری متماثلہ ذیل کی شکل میں بھی لکھی جا سکتی ہے:-

ا^{3} + ب^{3} + ج^{3} - ۳ ا ب ج = $\frac{1}{2}$(ا + ب + ج){(ب - ج)^{2} + (ج - ا)^{2} + (ا - ب)^{2}}

(ب - ج)^{3} + (ج - ا)^{3} + (ا - ب)^{3} = ۳(ب - ج)(ج - ا)(ا - ب)

(ا + ب + ج)^{3} - ا^{3} - ب^{3} - ج^{3} = ۳(ب + ج)(ج + ا)(ا + ب)

Σ ب ج(ب + ج) + ۲ ا ب ج = (ب + ج)(ج + ا)(ا + ب)

Σ ا^{2}(ب + ج) + ۲ ا ب ج = (ب + ج)(ج + ا)(ا + ب)

(ا + ب + ج)(ب ج + ج ا + ا ب) - ا ب ج = (ب + ج)(ج + ا)(ا + ب)

۲ ب^{2} ج^{2} + ۲ ج^{2} ا^{2} + ۲ ا^{2} ب^{2} - ا^{4} - ب^{4} - ج^{4}

= (ا + ب + ج)(ب + ج - ا)(ج + ا - ب)(ا + ب - ج)

امثلہ نمبری ۴۳ (ا)

۱- معلوم کرو کہ ۳ لا^{5} + ۱۱ لا^{4} + ۹۰ لا^{2} - ۱۹ لا + ۵۳ کو لا + ۵ پر تقسیم کرنے سے باقی کیا بچے گی۔

۲- بتاؤ کہ ا اور ب کس مساوات سے مربوط ہوں کہ ۲ لا^{۴} - ۷ لا^{۳} + ا لا + ب پورا تقسیم ہو جائے لا - ۳ پر۔

۳- خارج قسمت اور باقی معلوم کرو جب، لا^{۵} - ۵ لا^{۴} + ۹ لا^{۳} - ۶ لا^{۲} - ۱۶ لا + ۱۳ کو لا^{۲} - ۳ لا + ۲ پر تقسیم کیا جائے۔

۴- اگر لا^{۵} - ۲ لا^{۴} - ۴ لا^{۳} + ۱۹ لا^{۲} - ۳۱ لا + ۱۲ + ا کا ایک جزو ضربی لا^{۲} - ۷ لا + ۵ ہو تو ا کی قیمت معلوم کرو۔

۵- $\frac{۱}{\text{لا}^{۴} - ۵\,\text{لا}^{۳} + ۷\,\text{لا}^{۲} + \text{لا} - ۸}$ کو لا کی نزولی قوتوں کے سلسلہ میں چار رقموں تک پھیلاؤ اور باقی معلوم کرو۔

جملات ذیل کے اجزائے ضربی معلوم کرو:-

۶- ا(ب - ج)^{۳} + ب(ج - ا)^{۳} + ج(ا - ب)^{۳}

۷- ا^{۴}(ب^{۲} - ج^{۲}) + ب^{۴}(ج^{۲} - ا^{۲}) + ج^{۴}(ا^{۲} - ب^{۲})

۸- (ا + ب + ج)^{۳} - (ب + ج - ا)^{۳} - (ج + ا - ب)^{۳} - (ا + ب - ج)^{۳}

۹- ا(ب - ج)^{۲} + ب(ج - ا)^{۲} + ج(ا - ب)^{۲} + ۸ ا ب ج

۱۰- ا(ب^{۴} - ج^{۴}) + ب(ج^{۴} - ا^{۴}) + ج(ا^{۴} - ب^{۴})

۱۱- (ب ج + ج ا + ا ب)^{۳} - ب^{۳}ج^{۳} - ج^{۳}ا^{۳} - ا^{۳}ب^{۳}

۱۲- (ا + ب + ج)^{۴} - (ب + ج)^{۴} - (ج + ا)^{۴} - (ا + ب)^{۴} + ا^{۴} + ب^{۴} + ج^{۴}

۱۳- (ا + ب + ج)^{۵} - (ب + ج - ا)^{۵} - (ج + ا - ب)^{۵} - (ا + ب - ج)^{۵}

۱۴- (لا - ا)^{۳}(ب - ج)^{۳} + (لا - ب)^{۳}(ج - ا)^{۳} + (لا - ج)^{۳}(ا - ب)^{۳}

ذیل کی متماثلات کو ثابت کرو۔

۱۵ - $\sum$ (ب + ج − ۲ ا)^{۳} = ۳ (ب + ج − ۲ ا) (ج + ا − ۲ ب) (ا − ب + ۲ ج)

۱۶ - $\frac{ا(ب - ج)^{۲}}{(ج - ا)(ا - ب)} + \frac{ب(ج - ا)^{۲}}{(ا - ب)(ب - ج)} + \frac{ج(ا - ب)^{۲}}{(ب - ج)(ج - ا)}$ = ا + ب + ج

۱۷ - $\frac{۲ا}{ا + ب} + \frac{۲ب}{ب + ج} + \frac{۲ج}{ج + ا} + \frac{(ب - ج)(ج - ا)(ا - ب)}{(ب + ج)(ج + ا)(ا + ب)}$ = ۳

۱۸ - $\sum$ ا^{۲} (ب + ج) − $\sum$ ا^{۳} − ۲ ا ب ج = (ب + ج − ا) (ج + ا − ب) (ا + ب − ج)

۱۹ - $\frac{ا^{۳}(ب + ج)}{(ا - ب)(ا - ج)} + \frac{ب^{۳}(ج + ا)}{(ب - ج)(ب - ا)} + \frac{ج^{۳}(ا + ب)}{(ج - ا)(ج - ب)}$ = ب ج + ج ا + ا ب

۲۰ - ۴ $\sum$ (ب − ج) (ب + ج − ۲ ا)^{۲} = ۹ $\sum$ (ب − ج) (ب + ج − ا)^{۲}

۲۱ - (ما + ی)^{۲} (ی + لا)^{۲} (لا + ما)^{۲} = $\sum$ لا^{۴} (ما + ی)^{۲} + ۲ ($\sum$ ما ی)^{۳} − ۲ لا^{۲} ما^{۲} ی^{۲}

۲۲ - $\sum$ (ا ب − ج^{۲}) (ا ج − ب^{۲}) = ($\sum$ ب ج) ($\sum$ ب ج − $\sum$ ا^{۲})

۲۳ - ا ب ج ($\sum$ ا)^{۳} − ($\sum$ ب ج)^{۳} = ا ب ج $\sum$ ا^{۳} − $\sum$ ب^{۳} ج^{۳}

= (ا^{۲} − ب ج) (ب^{۲} − ج ا) (ج^{۲} − ا ب)

۲۴ - $\sum$ (ب − ج)^{۳} (ب + ج − ۲ ا) = ۰ اور اس سے مستنبط کرو کہ

$\sum$ (بہ − جہ) (بہ + جہ − ۲ عہ)^{۳} = ۰

۲۵ - (ب + ج)^{۳} + (ج + ا)^{۳} + (ا + ب)^{۳} − ۳ (ب + ج) (ج + ا) (ا + ب)

= ۲ (ا^{۳} + ب^{۳} + ج^{۳} − ۳ ا ب ج)

۲۶ - اگر لا = ب + ج − ا، ما = ج + ا − ب اور ی = ا + ب − ج

تو ثابت کرو کہ

$$لا^3 + ما^3 + ی^3 - ۳\ لا\ ما\ ی = ۴ (ا^3 + ب^3 + ج^3 - ۳\ ا\ ب\ ج)$$

۲۷- ثابت کرو کہ $ا^3 + ب^3 + ج^3 - ۳\ ا\ ب\ ج$ کی قیمت میں کوئی فرق نہیں آتا اگر ہم ا، ب، ج کی بجائے بالترتیب س - ا، س - ب، س - ج رکھیں جہاں $۳\ س = ۲ (ا + ب + ج)$

جملات ذیل کی قیمتیں معلوم کرو:-

۲۸- $$\frac{ا}{(ا-ب)(ا-ج)(لا-ا)} + \frac{ب}{(ب-ج)(ب-ا)(لا-ب)} + \frac{ج}{(ج-ا)(ج-ب)(لا-ج)}$$

۲۹- $$\frac{ا^2-ب^2-ج^2}{(ا-ب)(ا-ج)} + \frac{ب^2-ج^2-ا^2}{(ب-ج)(ب-ا)} + \frac{ج^2-ا^2-ب^2}{(ج-ا)(ج-ب)}$$

۳۰- $$\frac{(ا+ف)(ا+ق)}{(ا-ب)(ا-ج)(ا+لا)} + \frac{(ب+ف)(ب+ق)}{(ب-ج)(ب-ا)(ب+لا)} + \frac{(ج+ف)(ج+ق)}{(ج-ا)(ج-ب)(ج+لا)}$$

۳۱- $$\sum \frac{ب\ ج\ د}{(ا-ب)(ا-ج)(ا-د)}$$ ۳۲- $$\sum \frac{ا^2}{(ا-ب)(ا-ج)(ا-د)}$$

۳۳- اگر $لا + ما + ی = س$ اور $لا\ ما\ ی = ف^2$ تو ثابت کرو کہ

$$\left(\frac{ف}{ما\ س} - \frac{ما}{ف}\right)\left(\frac{ف}{ی\ س} - \frac{ی}{ف}\right) + \left(\frac{ف}{ی\ س} - \frac{ی}{ف}\right)\left(\frac{ف}{لا\ س} - \frac{لا}{ف}\right)$$

$$+ \left(\frac{ف}{لا\ س} - \frac{لا}{ف}\right)\left(\frac{ف}{ما\ س} - \frac{ما}{ف}\right) = \frac{۴}{س}$$

متفرق متماثلات

۵۲۴- بہت سی متماثلات ۱ کے جذر الکعبوں کے خواص کے استعمال سے نہایت آسانی سے ثابت کی جا سکتی ہیں - ان جذروں کو حسب معمول ۱، س، س² سے تعبیر کیا جائیگا۔

مثال - ثابت کرو کہ

$$(\text{لا}+\text{ما})^{۷}-\text{لا}^{۷}-\text{ما}^{۷}=۷\,\text{لا ما}(\text{لا}+\text{ما})(\text{لا}^{۲}+\text{لا ما}+\text{ما}^{۲})^{۲}$$

دائیں طرف کا جملہ ع معدوم ہو جاتا ہے اگر لا = ۰، ما = ۰، لا + ما = ۰، لہذا لا ما (لا + ما) اس کا جزوِ ضربی ہے۔

لا = سہ ما رکھنے سے

$$\text{ع}=\{(۱+\text{سہ})^{۷}-\text{سہ}^{۷}-۱\}\,\text{ما}^{۷}=\{(-\text{سہ}^{۲})^{۷}-\text{سہ}^{۷}-۱\}\,\text{ما}^{۷}$$

$$=(-\text{سہ}^{۲}-\text{سہ}-۱)\,\text{ما}^{۷}=۰$$

پس ظاہر ہے کہ ع میں ایک جزوِ ضربی (لا - سہ ما) شامل ہے، اسی طرح سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ اس میں لا - سہ^{۲} ما بطور جزو ضربی شامل ہے، اس لئے ع، (لا - سہ ما)(لا - سہ^{۲} ما) پر تقسیم ہو سکتا ہے یعنی لا^{۲} + لا ما + ما^{۲} پر تقسیم ہو سکتا ہے۔

مزید براں چونکہ ع سات ابعاد کا جملہ ہے اور لا ما (لا + ما)(لا^{۲} + لا ما + ما^{۲}) پانچ ابعاد کا ہے، اس لئے باقی جزو ضربی ا(لا^{۲} + ما^{۲}) + ب لا ما کی شکل کا ہوگا۔ یعنی

$$(\text{لا}+\text{ما})^{۷}-\text{لا}^{۷}-\text{ما}^{۷}=\text{لا ما}(\text{لا}+\text{ما})(\text{لا}^{۲}+\text{لا ما}+\text{ما}^{۲})(\text{ا لا}^{۲}+\text{ب لا ما}+\text{ا ما}^{۲})$$

لا = ۱، ما = ۱ رکھنے سے $۲۱=۲\,\text{ا}+\text{ب}$

لا = ۲، ما = -۱ رکھنے سے $۲۱=۵\,\text{ا}-۲\,\text{ب}$

حل کرنے سے $\text{ا}=۷$، $\text{ب}=۷$

$$\therefore (\text{لا}+\text{ما})^{۷}-\text{لا}^{۷}-\text{ما}^{۷}=۷\,\text{لا ما}(\text{لا}+\text{ما})(\text{لا}^{۲}+\text{لا ما}+\text{ما}^{۲})^{۲}$$

۵۲۵- ابتدائی الجبرا سے ہم جانتے ہیں کہ

$$\text{ا}^{۳}+\text{ب}^{۳}+\text{ج}^{۳}-۳\,\text{ا ب ج}=(\text{ا}+\text{ب}+\text{ج})(\text{ا}^{۲}+\text{ب}^{۲}+\text{ج}^{۲}-\text{ا ب}-\text{ب ج}-\text{ج ا})$$

نیز دفعہ ۱۱۰ مشق ۳ کی رُو سے ہمیں معلوم ہے کہ

$$\text{ا}^{۲}+\text{ب}^{۲}+\text{ج}^{۲}-\text{ا ب}-\text{ب ج}-\text{ج ا}=(\text{ا}+\text{سہ ب}+\text{سہ}^{۲}\text{ج})(\text{ا}+\text{سہ}^{۲}\text{ب}+\text{سہ ج})$$

پس جملہ ا^{۳} + ب^{۳} + ج^{۳} - ۳ ا ب ج تین خطی اجزائے ضربی میں تحلیل کیا جا سکتا ہے۔

$$\text{ا}^{۳}+\text{ب}^{۳}+\text{ج}^{۳}-۳\,\text{ا ب ج}=(\text{ا}+\text{ب}+\text{ج})(\text{ا}+\text{سہ ب}+\text{سہ}^{۲}\text{ج})(\text{ا}+\text{سہ}^{۲}\text{ب}+\text{سہ ج})$$

مثال - ثابت کرو کہ

ا^{۳} + ب^{۳} + ج^{۳} − ۳ ا ب ج اور لا^{۳} + ما^{۳} + ی^{۳} − ۳ لا ما ی کے حاصل ضرب کو
لا^{۳} + ما^{۳} + سے^{۳} − ۳ لا ما سے کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے

حاصل ضرب مذکور = (ا + ب + ج)(ا + سہ ب + سہ^{۲} ج)(ا + سہ^{۲} ب + سہ ج)
× (لا + ما + ی)(لا + سہ ما + سہ^{۲} ی)(لا + سہ^{۲} ما + سہ ی)

ان چھ اجزائے ضربی میں سے دو دو کے زوج

(ا + ب + ج)(لا + ما + ی)،

(ا + سہ ب + سہ^{۲} ج)(لا + سہ^{۲} ما + سہ ی) اور (ا + سہ^{۲} ب + سہ ج)(لا + سہ ما + سہ^{۲} ی)

لینے سے ہمیں ذیل کے تین جزوی حاصل ضرب حاصل ہوتے ہیں:-

(لا + ما + سے)، (لا + سہ ما + سہ^{۲} سے)، (لا + سہ^{۲} ما + سہ سے)

جہاں لا = ا لا + ب ما + ج ی، ما = ب لا + ج ما + ا ی
سے = ج لا + ا ما + ب ی

پس پورا حاصل ضرب = (لا + ما + سے)(لا + سہ ما + سہ^{۲} سے)(لا + سہ^{۲} ما + سہ سے)
= لا^{۳} + ما^{۳} + سے^{۳} − ۳ لا ما سے

۵۲۶ - ان جملات کی قیمتیں معلوم کرنے کے لئے جن میں مقادیر ا، ب، ج شامل ہوں جبکہ یہ مقادیر مساوات ا + ب + ج = ۰ سے مربوط ہوں ہم ذیل کے اندراجات سے کام لے سکتے ہیں:-

ا = ھ + ک، ب = سہ ھ + سہ^{۲} ک، ج = سہ^{۲} ھ + سہ ک

لیکن اگر ا، ب اور ج متشاکل طور پر شامل ہوں تو ذیل کی مثال کا طریقہ قابل ترجیح ہوتا ہے۔

اگر ا + ب + ج = ۰ تو ثابت کرو کہ

۶(ا^{۵} + ب^{۵} + ج^{۵}) = ۵(ا^{۳} + ب^{۳} + ج^{۳})(ا^{۲} + ب^{۲} + ج^{۲})

یہ مساوات متماثلاً درست ہے (۱ + ا لا)(۱ + ب لا)(۱ + ج لا)

$$= \text{۱} + \text{ف لا} + \text{ق لا}^{2} + \text{ر لا}^{3}$$

جہاں $\text{ف} = \text{ا} + \text{ب} + \text{ج}$ ، $\text{ق} = \text{اب} + \text{ب ج} + \text{ج ا}$ ، $\text{ر} = \text{ا ب ج}$

پس شرطِ مفروضہ یعنی $\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} = 0$ کو استعمال کرنے سے

$$(\text{۱} + \text{ا لا})(\text{۱} + \text{ب لا})(\text{۱} + \text{ج لا}) = \text{۱} + \text{ق لا}^{2} + \text{ر لا}^{3}$$

دونوں جانب لوگارتم لینے اور $\text{لا}^{\text{ن}}$ کے سروں کو مساوی کرنے سے

$$\frac{(-1)^{\text{ن}-1}}{\text{ن}}\left(\text{ا}^{\text{ن}} + \text{ب}^{\text{ن}} + \text{ج}^{\text{ن}}\right) = \text{لا}^{\text{ن}}\ \text{کا سر لوک}(\text{۱} + \text{ق لا}^{2} + \text{ر لا}^{3})\ \text{کی تفصیل میں}$$

$$= \text{لا}^{\text{ن}}\ \text{کا سر}\left[(\text{ق لا}^{2} + \text{ر لا}^{3}) - \tfrac{1}{2}(\text{ق لا}^{2} + \text{ر لا}^{3})^{2} + \tfrac{1}{3}(\text{ق لا}^{2} + \text{ر لا}^{3})^{3} - \cdots\cdots\right]\ \text{میں}$$

$\text{ن} = 2, 3, 5$ رکھنے سے حاصل ہوتا ہے۔

$$-\frac{\text{ا}^{2} + \text{ب}^{2} + \text{ج}^{2}}{2} = \text{ق}\ ,\ \frac{\text{ا}^{3} + \text{ب}^{3} + \text{ج}^{3}}{3} = \text{ر}\ ,\ \frac{\text{ا}^{5} + \text{ب}^{5} + \text{ج}^{5}}{5} = -\text{ق ر}$$

جس سے
$$\frac{\text{ا}^{5} + \text{ب}^{5} + \text{ج}^{5}}{5} = \frac{\text{ا}^{3} + \text{ب}^{3} + \text{ج}^{3}}{3} \times \frac{\text{ا}^{2} + \text{ب}^{2} + \text{ج}^{2}}{2}$$

اور مطلوبہ نتیجہ فوراً حاصل ہو جاتا ہے۔

اگر $\text{ا} = \text{بہ} - \text{جبہ}$ ، $\text{ب} = \text{جبہ} - \text{عہ}$ ، $\text{ج} = \text{عہ} - \text{بہ}$ تو شرطِ مذکورۂ بالا پوری ہوتی ہے۔

پس عہ، بہ اور جبہ کی تمام قیمتوں کے لئے ذیل کی مساوات متماثل طور پر صحیح ہے۔

$$6\left\{(\text{بہ} - \text{جبہ})^{5} + (\text{جبہ} - \text{عہ})^{5} + (\text{عہ} - \text{بہ})^{5}\right\}$$

$$= 5\left\{(\text{بہ} - \text{جبہ})^{3} + (\text{جبہ} - \text{عہ})^{3} + (\text{عہ} - \text{بہ})^{3}\right\}\left\{(\text{بہ} - \text{جبہ})^{2} + (\text{جبہ} - \text{عہ})^{2} + (\text{عہ} - \text{بہ})^{2}\right\}$$

یعنی
$$(\text{بہ} - \text{جبہ})^{5} + (\text{جبہ} - \text{عہ})^{5} + (\text{عہ} - \text{بہ})^{5} = 5(\text{بہ} - \text{جبہ})(\text{جبہ} - \text{عہ})(\text{عہ} - \text{بہ})$$
$$(\text{عہ}^{2} + \text{بہ}^{2} + \text{جبہ}^{2} - \text{بہ جبہ} - \text{جبہ عہ} - \text{عہ بہ})$$

دفعہ ۵۲۲ مشق ۳ سے مقابلہ کرو۔

امثلہ ۴۳ (ب)

۱۔ اگر (ا + ب + ج)^{۳} = ا^{۳} + ب^{۳} + ج^{۳} تو ثابت کرو کہ (ا + ب + ج)$^{۲ن+۱}$
= ا$^{۲ن+۱}$ + ب$^{۲ن+۱}$ + ج$^{۲ن+۱}$ جہاں ن کوئی مثبت صحیح عدد ہے۔

۲۔ ثابت کرو کہ (ا + سہ ب + سہ^{۲} ج)^{۳} + (ا + سہ^{۲} ب + سہ ج)^{۳}
= (۲ ا - ب - ج)(۲ ب - ج - ا)(۲ ج - ا - ب)

۳۔ ثابت کرو کہ اگر ن کوئی طاق مثبت صحیح عدد ہو جو ۳ کا کوئی ضعف نہ ہو تو (لا + ما)^{ن} - لا^{ن} - ما^{ن}
تقسیم ہو سکتا ہے لا ما (لا^{۲} + لا ما + ما^{۲}) پر

۴۔ ثابت کرو کہ ا^{۳}(ب ی - ج ما)^{۳} + ب^{۳}(ج لا - ا ی)^{۳} + ج^{۳}(ا ما - ب لا)^{۳}
= ۳ ا ب ج (ب ی - ج ما)(ج لا - ا ی)(ا ما - ب لا)

۵۔ اس جملہ کی قیمت معلوم کرو۔
(ب - ج)(ج - ا)(ا - ب) + (ب - سہ ج)(ج - سہ ا)(ا - سہ ب) + (ب - سہ^{۲} ج)
(ج - سہ^{۲} ا)(ا - سہ^{۲} ب)

۶۔ ثابت کرو کہ (ا^{۲} + ب^{۲} + ج^{۲} - ب ج - ج ا - ا ب)(لا^{۲} + ما^{۲} + ی^{۲} - ما ی - ی لا - لا ما) کو
لا^{۲} + ما^{۲} + سے^{۲} - لا ما - ما سے - لا سے کی شکل میں لایا جا سکتا ہے۔

۷۔ ثابت کرو کہ (ا^{۲} + ا ب + ب^{۲})(لا^{۲} + لا ما + ما^{۲}) کو
لا^{۲} + لا ما + ما^{۲} کی شکل میں لایا جا سکتا ہے۔ لا، ما کی قیمتیں معلوم کرو۔

ثابت کرو کہ

۸۔ Σ (ا^{۲} + ۲ ب ج)^{۳} - ۳ (ا^{۲} + ۲ ب ج)(ب^{۲} + ۲ ج ا)(ج^{۲} + ۲ ا ب)
= (ا^{۳} + ب^{۳} + ج^{۳} - ۳ ا ب ج)^{۲}

۹۔ Σ (ا^{۲} - ب ج)^{۳} - ۳ (ا^{۲} - ب ج)(ب^{۲} - ج ا)(ج^{۲} - ا ب)
= (ا^{۳} + ب^{۳} + ج^{۳} + ۳ ا ب ج)^{۲}

۱۰۔ (ا^{۲} + ب^{۲} + ج^{۲})^{۳} + ۲ (ب ج + ج ا + ا ب)^{۳} - ۳ (ا^{۲} + ب^{۲} + ج^{۲})(ب ج + ج ا + ا ب)^{۲}
= (ا^{۳} + ب^{۳} + ج^{۳} - ۳ ا ب ج)^{۲}

اگر ا + ب + ج = ۰ تو سوالات ۱۱ تا ۱۷ کی متماثلات ثابت کرو۔

۱۱- ۲ (ا^{۴} + ب^{۴} + ج^{۴}) = (ا^{۲} + ب^{۲} + ج^{۲})^{۲}

۱۲- ا^{۵} + ب^{۵} + ج^{۵} = - ۵ ا ب ج (ب ج + ج ا + ا ب)

۱۳- ا^{۶} + ب^{۶} + ج^{۶} = ۳ ا^{۲} ب^{۲} ج^{۲} - ۲ (ب ج + ج ا + ا ب)^{۳}

۱۴- ۳ (ا^{۲} + ب^{۲} + ج^{۲})(ا^{۵} + ب^{۵} + ج^{۵}) = ۵ (ا^{۳} + ب^{۳} + ج^{۳})(ا^{۴} + ب^{۴} + ج^{۴})

۱۵- (ا^{۷} + ب^{۷} + ج^{۷}) / ۷ = (ا^{۵} + ب^{۵} + ج^{۵}) / ۵ × (ا^{۲} + ب^{۲} + ج^{۲}) / ۲

۱۶- ((ب - ج)/ا + (ج - ا)/ب + (ا - ب)/ج) (ا/(ب - ج) + ب/(ج - ا) + ج/(ا - ب)) = ۹

۱۷- (ب^{۲} ج + ج^{۲} ا + ا^{۲} ب - ۳ ا ب ج)(ب ج^{۲} + ج ا^{۲} + ا ب^{۲} - ۳ ا ب ج)

= (ب ج + ج ا + ا ب)^{۳} + ۲۷ ا^{۲} ب^{۲} ج^{۲}

۱۸- ۲۵ {(ما - ی)^{۷} + (ی - لا)^{۷} + (لا - ما)^{۷}} {(ما - ی)^{۳} + (ی - لا)^{۳} + (لا - ما)^{۳}}

= ۲۱ {(ما - ی)^{۵} + (ی - لا)^{۵} + (لا - ما)^{۵}}^{۲}

۱۹- {(ما - ی)^{۲} + (ی - لا)^{۲} + (لا - ما)^{۲}}^{۳} - ۵۴ (ما - ی)^{۲} (ی - لا)^{۲} (لا - ما)^{۲}

= ۲ (ما + ی - ۲ لا)^{۲} (ی + لا - ۲ ما)^{۲} (لا + ما - ۲ ی)^{۲}

۲۰- (ب - ج)^{۶} + (ج - ا)^{۶} + (ا - ب)^{۶} - ۳ (ب - ج)^{۲} (ج - ا)^{۲} (ا - ب)^{۲}

= ۲ (ا^{۲} + ب^{۲} + ج^{۲} - ب ج - ج ا - ا ب)^{۳}

۲۱- (ب - ج)^{۷} + (ج - ا)^{۷} + (ا - ب)^{۷}

= ۷ (ب - ج)(ج - ا)(ا - ب)(ا^{۲} + ب^{۲} + ج^{۲} - ب ج - ج ا - ا ب)^{۲}

۲۲- اگر ا + ب + ج = ۰ اور لا + ما + ی = ۰ تو ثابت کرو کہ

۴ (الا + ب ما + ج ی)^{۳} − ۳ (الا + ب ما + ج ی)(ا^{۲} + ب^{۲} + ج^{۲})(لا^{۲} + ما^{۲} + ی^{۲})

− ۲ (ب − ج)(ج − ا)(ا − ب)(ما − ی)(ی − لا)(لا − ما) = ۵۴ اب ج لا ما ی

اگر ا + ب + ج + د = ۰ تو ثابت کرو کہ

۲۳ - $\frac{ا^{۵} + ب^{۵} + ج^{۵} + د^{۵}}{۵} = \frac{ا^{۳} + ب^{۳} + ج^{۳} + د^{۳}}{۳} \times \frac{ا^{۲} + ب^{۲} + ج^{۲} + د^{۲}}{۲}$

۲۴ - (ا^{۳} + ب^{۳} + ج^{۳} + د^{۳})^{۲} = ۹ (ب ج د + ج د ا + د ا ب + ا ب ج)^{۲}

= ۹ (ب ج − ا د)(ج ا − ب د)(ا ب − ج د)

۲۵ - اگر ۲ س$_{۱}$ = ا + ب + ج اور ۲ س$_{۲}^{۲}$ = ا^{۲} + ب^{۲} + ج^{۲} تو ثابت کرو کہ

$\sum$ (س$_{۱}$ − ب)(س$_{۱}$ − ج)(س$_{۲}^{۲}$ − ا^{۲}) + ۵ ا ب ج س$_{۱}$ = (س$_{۱}^{۲}$ − س$_{۲}^{۲}$)(۴ س$_{۱}^{۲}$ + س$_{۲}^{۲}$)

۲۶ - ثابت کرو کہ (لا^{۳} + ۶ لا^{۲} ما + ۳ لا ما^{۲} − ما^{۳})^{۳} + (ما^{۳} + ۶ لا ما^{۲} + ۳ لا^{۲} ما − لا^{۳})^{۳}

= ۲۷ لا ما (لا + ما)(لا^{۲} + لا ما + ما^{۲})^{۳}

۲۷ - ثابت کرو کہ $\sum \frac{ا^{۵}}{(ا - ب)(ا - ج)(ا - د)}$

= ا^{۲} + ب^{۲} + ج^{۲} + د^{۲} + ا ب + ا ج + ا د + ب ج + ب د + ج د

۲۸ - ذیل کے جملہ کو اجزائے ضربی میں تحلیل کرو:

۲ ا^{۲} ب^{۲} ج^{۲} + (ا^{۳} + ب^{۳} + ج^{۳}) ا ب ج + ب^{۳} ج^{۳} + ج^{۳} ا^{۳} + ا^{۳} ب^{۳}

اسقاط

۵۲۷ - باب سی و سوم میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ خطّی مساواتوں کے ایک نظام کا حاصل اسقاط فوراً ایک مقطعہ کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔ عملِ اسقاط کے اُن عام طریقوں پر جن کا اطلاق ہر درجہ کی مساواتوں پر ہو سکے مساواتوں کے نظریہ کی کتابوں میں مفصل بحث کی گئی ہے۔ طالب علم

کو چاہیئے کہ بالخصوص ڈاکٹر سالمن کی کتاب Lessons Introductory to the Modern Higher Algebra کے ابواب چہارم وششم کا اور برن سائیڈ اور پنٹین کے نظریۂ مساواتات باب ہشتم کا مطالعہ کرے۔

اگرچہ یہ طریقے نظری طور پر بالکل مکمل ہیں مگر عملی طور پر ہمیشہ سہولت بخش ثابت نہیں ہوتے۔ اس لئے ہم پہلے عمل اسقاط کے عام نظریہ کی مجمل تشریح کرینگے اور پھر اُن قاعدوں کی توضیح کے لئے جو عملی طور پر زیادہ مفید ہیں چند مثالیں حل کریں گے۔

۵۲۸۔ پہلے دو مساواتوں میں سے ایک نامعلوم مقدار کے اسقاط پر غور کرو۔

فرض کرو کہ مساواتیں ف (لا) = ۰ اور فہ (لا) = ۰ ہیں۔ نیز فرض کرو کہ اگر ممکن ہو تو یہ مساواتیں ایسی شکل میں تحویل کردی گئی ہیں جس میں ف (لا) اور فہ (لا) دونوں لا کے منطق صحیح تفاعل ہیں۔ چونکہ یہ دونوں تفاعل ایک ساتھ معدوم ہوتے ہیں، اس لئے لا کی کوئی نہ کوئی ایسی قیمت ضرور ہوگی جو دونوں مساواتوں کو پورا کرے۔ پس حاصل اسقاط اُس شرط کو تعبیر کرتا ہے جو کہ اِن مساواتوں کے سروں میں ہونی چاہیئے تاکہ اِن مساواتوں کی ایک اصل مشترک ہو۔

فرض کرو کہ لا = عہ، لا = بہ، لا = جہ، ..... مساوات ف (لا) = ۰ کی اصلیں ہیں، تب مقادیر فہ (عہ)، فہ (بہ)، فہ (جہ)، .... میں سے کم از کم ایک مقدار ضرور صفر کے مساوی ہوگی، پس حاصل اسقاط مطلوب فہ (عہ) فہ (بہ) فہ (جہ)، .... = ۰ ہے۔

دائیں طرف کا جملہ مساوات ف (لا) = ۰ کی اصلوں کا ایک متشاکل تفاعل ہے اور اس کی قیمت معلوم کرنے کے طریقے نظریۂ معادلات کی کتابوں میں درج ہیں۔

۵۲۹۔ اب ہم عمل اسقاط کے تین عام طریقوں کی تشریح کرینگے۔ ہمارے مقاصد کے لئے صرف ایک آسان مثال حل کرنا کافی ہے لیکن ہم دیکھینگے کہ ہر صورت میں اس عمل کا اطلاق ہر درجہ کی مساوات پر ہو سکتا ہے۔

ذیل کی مثال میں جو اصول تمثیلاً بیان کیا گیا ہے اُس کو آئیلر نے دریافت کیا تھا۔

مثال۔ ذیل کی مساواتوں میں سے لا کو ساقط کرو

$$ا لا^3 + ب لا^2 + ج لا + د = 0 \quad ، \quad ف لا^2 + گ لا + ھ = 0$$

فرض کرو کہ

دونوں مساواتوں کی مشترک اصل کے جواب میں جزوِ ضربی لا + ک ہے اور فرض کرو کہ

$$ا لا^3 + ب لا^2 + ج لا + د = (لا + ک)(ا لا^2 + ل لا + م)$$

اور

$$ف لا^2 + گ لا + ھ = (لا + ک)(ف لا + ن)$$

جہاں ک، ل، م، ن نا معلوم مقداریں ہیں۔

اِن مساواتوں سے متماثل طور پر

$$(ا لا^3 + ب لا^2 + ج لا + د)(ف لا + ن) = (ا لا^2 + ل لا + م)(ف لا^2 + گ لا + ھ)$$

لا کی یکساں قوتوں کے سروں کو مساوی کرنے سے

$$\begin{aligned} ف ل \quad & - ا ن + ا گ - ب ف = 0 \\ گ ل + ف م \quad & - ب ن + ا ھ - ج ف = 0 \\ ھ ل + گ م \quad & - ج ن \quad - د ف = 0 \\ ھ م \quad & - د ن \quad = 0 \end{aligned}$$

اِن مساواتوں میں سے ل، م، ن کو ساقط کرنے سے ذیل کا مقطعہ حاصل ہوتا ہے

$$\begin{vmatrix} ف & 0 & ا & ا گ - ب ف \\ گ & ف & ب & ا ھ - ج ف \\ ھ & گ & ج & - د ف \\ 0 & ھ & د & 0 \end{vmatrix} = 0$$

۵۳۰ - مُعادلات ف (لا) = ۰ اور فہ (لا) = ۰ کا حاصل اسقاط سِل وسٹر (Sylvester) کے افتراقی طریقۂ اسقاط سے ایک مقطعہ کی شکل میں بآسانی معلوم ہوسکتا ہے۔ ہم گزشتہ مثال ہی کو حل کرینگے۔

مثال۔ مساواتات ا لا^{۳} + ب لا^{۲} + ج لا + د = ۰
ف لا^{۲} + گ لا + ھ = ۰

میں سے لا کو ساقط کرو۔

پہلی مساوات کو لا سے اور دوسری مساوات کو بالترتیب لا اور لا^{۲} سے ضرب دو۔ اس طرح سے ہمیں پانچ مساواتیں حاصل ہونگی جن میں سے ہم چار مقادیر لا^{۴}، لا^{۳}، لا^{۲} اور لا کو ساقط کر سکتے ہیں جن کو مختلف متغیر خیال کیا جاسکتا ہے۔ یہ مساواتیں حسب ذیل ہیں:-

ا لا^{۳} + ب لا^{۲} + ج لا + د = ۰

ا لا^{۴} + ب لا^{۳} + ج لا^{۲} + د لا = ۰

ف لا^{۲} + گ لا + ھ = ۰

ف لا^{۳} + گ لا^{۲} + ھ لا = ۰

ف لا^{۴} + گ لا^{۳} + ھ لا^{۲} = ۰

پس حاصل اسقاط مطلوبہ یہ ہے:-

$$\begin{vmatrix} ۰ & ا & ب & ج & د \\ ا & ب & ج & د & ۰ \\ ۰ & ۰ & ف & گ & ھ \\ ۰ & ف & گ & ھ & ۰ \\ ف & گ & ھ & ۰ & ۰ \end{vmatrix} = ۰$$

۵۳۱ - ذیل میں جو طریقہ مندرج کیا گیا ہے اسکا اصول بیزاؤٹ (Bezout) نے دریافت کیا تھا۔ اس طریقہ سے ہم حاصلِ اسقاط کو گزشتہ طریقوں کی نسبت مقابلۃً چھوٹے درجہ کے مقطعہ میں ظاہر کر سکتے ہیں، اس لحاظ سے یہ طریقہ گزشتہ دفعہ کے دونوں طریقوں پر فوقیت رکھتا

ہے، ہم پھر وہی مثال لینگے جو پہلے حل کی گئی ہے اور عملِ اسقاط کے لئے کوشی[1] کا طریقِ عمل درج کریں گے۔

مثال۔ مساواتیں ا لا^{۳} + ب لا^{۲} + ج لا + د = ۰

اور ف لا^{۲} + گ لا + ھ = ۰

میں سے لا کو ساقط کرو۔

ان مساواتوں سے ا / ف = (ب لا^{۲} + ج لا + د) / (گ لا^{۲} + ھ لا)

(ا لا + ب) / (ف لا + گ) = (ج لا + د) / (ھ لا)

جس سے (ا گ - ب ف) لا^{۲} + (ا ھ - ج ف) لا - د ف = ۰

اور (ا ھ - ج ف) لا^{۲} + (ب ھ - ج گ - د ف) لا - د گ = ۰

ان دونوں مساواتوں کو ف لا^{۲} + گ لا + ھ = ۰ کے ساتھ ملانے سے اور لا^{۲} اور لا کو مختلف متغیر خیال کرنے سے

ف	گ	ھ
اگ - ب ف	اھ - ج ف	- د ف
اھ - ج ف	ب ھ - ج گ - د ف	- د گ

= ۰

۵۳۲ - اگر ہمارے پاس دو مساواتیں فہ$_{۱}$ (لا، ما) = ۰ اور فہ$_{۲}$ (لا، ما) = ۰ کی شکل کی ہوں تو ہم ما کو گزشتہ طریقوں میں سے کسی ایک طریقہ سے ساقط کر سکتے ہیں۔ اس صورت میں حاصل اسقاط لا کا ایک تفاعل ہوگا۔

اگر ہمارے پاس تین مساواتیں اِن شکلوں

فہ$_{۱}$ (لا، ما، ی) = ۰، فہ$_{۲}$ (لا، ما، ی) = ۰، فہ$_{۳}$ (لا، ما، ی) = ۰

کی ہوں تو پہلی اور دوسری مساواتوں سے ی کو ساقط کرنے سے اور پھر دوسری اور تیسری مساواتوں سے ی کو ساقط کرنے سے ہمیں دو مساواتیں اِس شکل

[1] Cauchy

$$\text{سا}_1(\text{لا}،\text{ما}) = ۰ \quad \text{اور} \quad \text{سا}_2(\text{لا}،\text{ما}) = ۰$$

کی ملتی ہیں - اگر ہم اِن مساواتوں سے ما کو ساقط کریں تو ہمیں ایک حاصل ف (لا) = ۰ کی شکل کا ملیگا -

اس قسم کے استدلال سے ثابت کیا جا سکتا ہے کہ ہم ن + ۱ مساواتوں میں سے ن متغیروں کو ساقط کر سکتے ہیں -

۵۳۳ - عمل اسقاط کے متعلق جو عام طریقے اوپر بیان ہوئے اُن سے اکثر اوقات استفادہ کیا جا سکتا ہے لیکن اس طرح سے جو حاصل اسقاط ملینگے وہ شاذ و نادر ہی سادہ ترین شکل میں ہونگے - اکثر اوقات مساواتوں کو دیکھنے سے ہی خود بخود اسقاط کے کسی خاص طریقہ کا پتا چل جاتا ہے' اس کی تشریح ذیل میں کی جاتی ہے:-

مثال ۱ - ذیل کی مساواتوں

$$\text{ل لا} + \text{م ما} = ا، \quad \text{م لا} - \text{ل ما} = ب، \quad \text{ل}^2 + \text{م}^2 = ۱$$

سے ل اور م کو ساقط کرو -

پہلی دو مساواتوں کا مربع لینے اور جمع کرنے سے

$$\text{ل}^2\text{لا}^2 + \text{م}^2\text{لا}^2 + \text{م}^2\text{ما}^2 + \text{ل}^2\text{ما}^2 = ا^2 + ب^2$$

یعنی $(\text{ل}^2 + \text{م}^2)(\text{لا}^2 + \text{ما}^2) = ا^2 + ب^2$

پس حاصل اسقاط مطلوبہ $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = ا^2 + ب^2$

اگر ل = جم ط اور م = جب ط تو تیسری مساوات متماثل طور پر پوری ہوتی ہے

یعنی لاجم ط + ماجب ط = ا، لاجب ط - ماجم ط = ب کا حاصل اسقاط

$\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = ا^2 + ب^2$ ہے -

مثال ۲ - معادلات $\text{ما}^2 + ی^2 = ۲\,ا\,\text{ما}\,ی$، $ی^2 + \text{لا}^2 = ۲\,ب\,ی\,\text{لا}$، $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = ۲\,ج\,\text{لا}\,\text{ما}$ سے لا، ما، ی ساقط کرو -

اِن مساواتوں سے $\frac{\text{ما}}{\text{ی}}+\frac{\text{ی}}{\text{ما}}=\text{ا}$، $\frac{\text{ی}}{\text{لا}}+\frac{\text{لا}}{\text{ی}}=\text{ب}$، $\frac{\text{لا}}{\text{ما}}+\frac{\text{ما}}{\text{لا}}=\text{ج}$

اِن تینوں مساواتوں کو ضرب دینے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے:-

$$۲+\frac{\text{ما}^۲}{\text{ی}^۲}+\frac{\text{ی}^۲}{\text{ما}^۲}+\frac{\text{ی}^۲}{\text{لا}^۲}+\frac{\text{لا}^۲}{\text{ی}^۲}+\frac{\text{لا}^۲}{\text{ما}^۲}+\frac{\text{ما}^۲}{\text{لا}^۲}=\text{ا ب ج}$$

پس
$$۲+(\text{ا}^۲-۲)+(\text{ب}^۲-۲)+(\text{ج}^۲-۲)=\text{ا ب ج}$$

$$\therefore\ \text{ا}^۲+\text{ب}^۲+\text{ج}^۲-۴=\text{ا ب ج}$$

مثال ۳- معادلات $\text{لا}^۲-\text{ما}^۲=\text{ف لا}-\text{ق ما}$، $۴\,\text{لا ما}=\text{ق لا}+\text{ف ما}$، $\text{لا}^۲+\text{ما}^۲=۱$ سے لا، ما کو ساقط کرو۔

پہلی مساوات کو لا سے اور دوسری کو ما سے ضرب دینے اور جمع کرنے سے

$$\text{لا}^۳+۳\,\text{لا ما}^۲=\text{ف}\,(\text{لا}^۲+\text{ما}^۲)$$

اس لئے تیسری مساوات سے

$$\text{ف}=\text{لا}^۳+۳\,\text{لا ما}^۲$$

اسی طرح سے $\text{ق}=۳\,\text{لا}^۲\,\text{ما}+\text{ما}^۳$

پس $\text{ف}+\text{ق}=(\text{لا}+\text{ما})^۳$ اور $\text{ف}-\text{ق}=(\text{لا}-\text{ما})^۳$

$$\therefore\ (\text{ف}+\text{ق})^{\frac{۲}{۳}}+(\text{ف}-\text{ق})^{\frac{۲}{۳}}=(\text{لا}+\text{ما})^۲+(\text{لا}-\text{ما})^۲$$

$$=۲\,(\text{لا}^۲+\text{ما}^۲)$$

$$\therefore\ (\text{ف}+\text{ق})^{\frac{۲}{۳}}+(\text{ف}-\text{ق})^{\frac{۲}{۳}}=۲$$

مثال ۴- معادلات $\frac{\text{ما}}{\text{ی}}-\frac{\text{ی}}{\text{ما}}=\text{ا}$، $\frac{\text{ی}}{\text{لا}}-\frac{\text{لا}}{\text{ی}}=\text{ب}$، $\frac{\text{لا}}{\text{ما}}-\frac{\text{ما}}{\text{لا}}=\text{ج}$ سے لا، ما، ی کو ساقط کرو۔

اِن مساواتوں سے $ا + ب + ج = \frac{لا(ما^2 - ی^2) + ما(ی^2 - لا^2) + ی(لا^2 - ما^2)}{لا\ ما\ ی}$

$= \frac{(ما - ی)(ی - لا)(لا - ما)}{لا\ ما\ ی}$

اگر ہم لا کی علامت بدلیں تو ب اور ج کی علامتیں بدل جاتی ہیں لیکن ا کی علامت نہیں بدلتی ۔

پس $ا - ب - ج = \frac{(ما - ی)(ی + لا)(لا + ما)}{لا\ ما\ ی}$

اِسی طرح سے $ب - ج - ا = \frac{(ما + ی)(ی - لا)(لا + ما)}{لا\ ما\ ی}$

اور $ج - ا - ب = \frac{(ما + ی)(ی + لا)(لا - ما)}{لا\ ما\ ی}$

$\therefore (ا + ب + ج)(ب + ج - ا)(ج + ا - ب)(ا + ب - ج)$

$= - \frac{(ما^2 - ی^2)^2(ی^2 - لا^2)^2(لا^2 - ما^2)^2}{لا^4\ ما^4\ ی^4}$

$= -\left(\frac{ما}{ی} - \frac{ی}{ما}\right)^2\left(\frac{ی}{لا} - \frac{لا}{ی}\right)^2\left(\frac{لا}{ما} - \frac{ما}{لا}\right)^2 = - ا^2\ ب^2\ ج^2$

$\therefore\ ۲\ ب^2 ج^2 + ۲\ ج^2 ا^2 + ۲\ ا^2 ب^2 - ا^4 - ب^4 - ج^4 + ا^2 ب^2 ج^2 = ۰$

امثلۂ ۴۳ (ج)

۱۔ معادلات $م^2 لا - ۲م\ ما + ا = ۰$، $م\ ما + لا = ۰$ سے م کو ساقط کرو۔

۲۔ معادلات $م^2 لا - م\ ما + ا = ۰$، $ن^2 لا - ن\ ما + ا = ۰$، $م ن + ۱ = ۰$ میں سے م اور ن کو ساقط کرو۔

۳۔ معادلات $م\ لا - ن\ ما = ا(م^2 - ن^2)$، $ن\ لا + م\ ما = ۲\ ا\ م\ ن$، $م^2 + ن^2 = ۱$ میں سے م اور ن کو ساقط کرو۔

۴- معادلات ف + ق + ر = ۰، ا(ق ر + ر ف + ف ق) = ۲ ا - لا
ا ف ق ر = ما ، ق ر = - ۱
میں سے ف، ق، ر کو ساقط کرو۔

۵- معادلات الا^{2} - ۲ ا^{2} لا + ۱ = ۰ ، ا^{2} + لا^{2} - ۳ الا = ۰ میں سے لا کو ساقط کرو۔

۶- معادلات ما + م لا = ا (۱ + م)، م ما - لا = ا (۱ - م) میں سے م کو ساقط کرو۔

۷- معادلات ما ی = ا^{2} ، ی لا = ب^{2} ، لا ما = ج^{2} ، لا^{2} + ما^{2} + ی^{2} = د^{2} میں سے لا، ما، ی کو ساقط کرو۔

۸- معادلات لا (ف + ق) = ما، (ف - ق) = ک (۱ + ف ق)
لا ف ق = ا میں سے ف، ق کو ساقط کرو۔

۹- معادلات لا - ما = ا ، لا^{2} - ما^{2} = ب^{2} ، لا^{3} - ما^{3} = ج^{3} میں سے لا، ما کو ساقط کرو۔

۱۰- مساواتات لا + ما = ا ، لا^{2} + ما^{2} = ب^{2}، لا^{4} + ما^{4} = ج^{4} میں سے لا، ما کو ساقط کرو۔

۱۱- معادلات ذیل لا = ب ما + ج ی + د ء، ما = ج ی + د ء + الا
ی = د ء + ا لا + ب ما ، ء = الا + ب ما + ج ی میں سے لا، ما، ی، ء کو ساقط کرو۔

۱۲- معادلات ذیل لا + ما + ی = ۰ ، لا^{2} + ما^{2} + ی^{2} = ا^{2}
لا^{3} + ما^{3} + ی^{3} = ب^{3} ، لا^{5} + ما^{5} + ی^{5} = ج^{5}
میں سے لا، ما، ی کو ساقط کرو۔

۱۳- معادلات ذیل میں سے لا، ما، ی کو ساقط کرو۔

لا/ما + ما/ی + ی/لا = ا، ی/ما + ما/لا + لا/ی = ب، (لا/ما + ما/ی)(ما/ی + ی/لا)
(لا/ما + ی/لا) = ج

۱۴۔ مساواتات ذیل میں سے لا، ما، ی کو ساقط کرو۔

$$\frac{لا^{۲}(ما+ی)}{ا^{۳}} = \frac{ما^{۲}(ی+لا)}{ب^{۳}} = \frac{ی^{۲}(لا+ما)}{ج^{۳}} = \frac{لا\ ما\ ی}{ا\ ب\ ج} = ۱$$

۱۵۔ مساواتات $۴(لا^{۲}+ما^{۲}) = ا لا + ب ما$ ، $۲(لا^{۲}-ما^{۲}) = ا لا - ب ما$ ، $لا ما = ج^{۲}$ میں سے لا، ما کو ساقط کرو۔

۱۶۔ مساواتات ذیل میں لا، ما، ی کو ساقط کرو

$(ما+ی)^{۲} = ۴ ا^{۲} ما ی$ ، $(ی+لا)^{۲} = ۴ ب^{۲} ی لا$ ، $(لا+ما)^{۲} = ۴ ج^{۲} لا ما$

۱۷۔ معادلات ذیل $(لا+ما-ی)(لا-ما+ی) = ا ما ی$ ، $(ما+ی-لا)(ما-ی+لا) = ب ی لا$ ، $(ی+لا-ما)(ی-لا+ما) = ج لا ما$ میں سے لا، ما، ی کو ساقط کرو۔

۱۸۔ معادلات ذیل $لا^{۲} ما = ا$ ، $لا(لا+ما) = ب$ ، $۲لا+ما = ج$ میں سے لا، ما کو ساقط کرو۔

۱۹۔ ثابت کرو کہ $ا لا^{۲} + ب ما^{۲} + ج ی^{۲} = ا لا + ب ما + ج ی = ما ی + ی لا + لا ما = ۰$ کا حاصل اسقاط $(ا+ب+ج)^{۳} - ۴(ب+ج)(ج+ا)(ا+ب) + ۵ ا ب ج = ۰$ ہے۔

۲۰۔ معادلات $ا لا^{۲} + ب ما^{۲} = ا لا + ب ما = \frac{لا ما}{لا+ما} = ج$ میں سے لا، ما کو ساقط کرو۔

۲۱۔ ثابت کرو کہ $ا لا + ما ی = ب ج$ ، $ب ما + ی لا = ج ا$ ، $ج ی + لا ما = ا ب$ اور $لا ما ی = ا ب ج$ کا حاصل اسقاط $ب^{۳}ج^{۳} + ج^{۳}ا^{۳} + ا^{۳}ب^{۳} = ۵ ا^{۲}ب^{۲}ج^{۲}$ ہے

۲۲۔ $لا^{۲} + ما^{۲} + ی^{۲} = لا + ما + ی = ۱$ اور $\frac{ا}{لا}(لا - ف) = \frac{ب}{ما}(ما - ق) = \frac{ج}{ی}(ی - ر)$ سے لا، ما، ی کو ساقط کرو۔

۲۳۔ بیزاؤٹ (Bezout) کے طریقہ کو استعمال کرکے معادلات

$ا لا^{۳} + ب لا^{۲} ما + ج لا ما^{۲} + د ما^{۳} = ۰$ اور $ا' لا^{۳} + ب' لا^{۲} ما + ج' لا ما^{۲} + د' ما^{۳} = ۰$

میں سے لا، ما کو ساقط کرو۔

پینتیسواں باب

نظریۂ معادلات

۵۳۴- باب ہنم میں ہم مساوات درجۂ دوم کے سروں اور اصلوں کے چند باہمی روابط ثابت کر چکے ہیں- یہاں ہم پہلے ن ویں درجہ کی مساواتوں کی صورت میں اسی قسم کے روابط معلوم کرینگے اور پھر مساواتوں کے عام نظریہ کے چند ابتدائی خواص پر بحث کرینگے-

۵۳۵- فرض کرو کہ $ف_۰ لا^{ن} + ف_۱ لا^{ن-۱} + ف_۲ لا^{ن-۲} + \dots\dots + ف_{ن-۱} لا + ف_{ن}$، لا کا ایک ن ابعاد کا منطق صحیح تفاعل ہے، اس کو ف (لا) سے تعبیر کرو، تب ف (لا) = ۰ ن ویں درجہ کی منطق صحیح مساوات کا ایک عام نمونہ ہے- اس کی سب رقموں کو $ف_۰$ پر تقسیم کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ عمومیت میں کسی طرح ہارج ہوئے بغیر مساوات

$$لا^{ن} + ف_۱ لا^{ن-۱} + ف_۲ لا^{ن-۲} + \dots\dots\dots\dots + ف_{ن-۱} لا + ف_{ن} = ۰$$

کو کسی درجہ کی ایک منطق صحیح مساوات کے نمونہ کے طور پر لیا جا سکتا ہے- اگر اس کے برعکس نہ بیان کیا گیا ہو تو سروں $ف_۱$، $ف_۲$، .... $ف_{ن}$ کو ہمیشہ منطق تصور کیا جائیگا-

۵۳۶- لا کی کوئی قیمت جس سے ف (لا) صفر ہو جائے مساوات ف (لا) = ۰ کی اصل کہلاتی ہے-

دفعہ ۱۴ ۵ میں یہ ثابت کیا جا چکا ہے کہ جب ف (لا) کو لا - ۱ پر تقسیم کیا جائے تو باقی ف (۱) بچتی ہے، پس اگر ف (لا)، لا - ۱ پر پورا تقسیم ہو جائے اور باقی کچھ نہ بچے تو مساوات ف (لا) = ۰ کی ایک اصل ۱ ہوگی-

۵۳۷- ہم یہاں یہ تسلیم کریں گے کہ ف (لا) = ۰ کی شکل کی ہر ایک مساوات کی ایک اصل ضرور ہے، خواہ یہ اصل حقیقی ہو یا خیالی- اس مسئلہ کا ثبوت نظریۂ

تعادلات کی کتابوں میں مل سکتا ہے اور کتاب ہذا کی حدود سے باہر ہے۔

۳۸۵ - ن ویں درجہ کی ہر مساوات کی ن اصلیں ہوتی ہیں اس سے زیادہ نہیں ہوسکتیں۔

مساوات مفروضہ کو ف (لا) = ۰ سے تعبیر کرو جہاں

$$ف (لا) = ف_۰ لا^ن + ف_۱ لا^{ن-۱} + ف_۲ لا^{ن-۲} + \ldots\ldots + ف_ن$$

اب مساوات ف (لا) = ۰ کی ایک اصل (خیالی یا حقیقی) ہے، فرض کرو کہ یہ اصل $ا_۱$ ہے، تب ف (لا) پورا تقسیم ہوسکتا ہے لا - $ا_۱$ پر، یعنی

$$ف (لا) = (لا - ا_۱)\ ف_۱ (لا)$$

جہاں $ف_۱$(لا)، ن-۱ ویں ابعاد کا ایک منطق صحیح تفاعل ہے، اب پھر مساوات $ف_۱$(لا)=۰ کی ایک حقیقی یا خیالی اصل ہے، اس اصل کو $ا_۲$ سے تعبیر کرو، تب $ف_۱$(لا) لا - $ا_۲$ پر پورا تقسیم ہو جائیگا - یعنی

$$ف_۱ (لا) = (لا - ا_۲)\ ف_۲ (لا)$$

جہاں $ف_۲$ (لا)، ن-۲ ، ابعاد کا ایک منطق صحیح تفاعل ہے

لہذا $ف (لا) = (لا - ا_۱)(لا - ا_۲)\ ف_۲ (لا)$

اسی طرح سے ہمیں دفعہ ۳۰۹ کی مانند حاصل ہوتا ہے:

$$ف (لا) = ف_۰ (لا - ا_۱)(لا - ا_۲) \ldots\ldots\ldots\ldots (لا - ا_ن)$$

پس مساوات ف (لا) = ۰ کی ن اصلیں ہیں کیونکہ ف (لا) معدوم ہو جاتا ہے جبکہ لا کی قیمت $ا_۱$، $ا_۲$، $ا_۳$، .... ان میں سے کسی ایک کے مساوی ہو۔
نیز مساوات بالا کی اصلیں ن سے زیادہ نہیں ہوسکتیں کیونکہ اگر مقادیر $ا_۱$، $ا_۲$، $ا_۳$.... ان کے علاوہ لا کی کوئی اور قیمت ہو تو بائیں جانب کے

سب اجزائے ضربی میں سے کوئی بھی صفر نہیں ہوگا اور اس لئے لا کی اُس قیمت کے لئے ف (لا) صفر نہیں ہوگا۔

اوپر کی تحقیقات میں ممکن ہے کہ مقادیر $ا_1$، $ا_2$، $ا_3$ ..... $ا_ن$ میں سے بعض باہم مساوی ہوں، تاہم اس صورت میں بھی ہم یہی سمجھیں گے کہ مساوات کی ن، اصلیں ہیں اگرچہ یہ سب اصلیں مختلف نہیں ہیں۔

۵۳۹۔ کسی مساوات کی اصلوں اور سروں کے باہمی روابط کی تحقیق کرو۔

فرض کرو کہ مساوات $لا^ن + فہ_1 لا^{ن-1} + فہ_2 لا^{ن-2} + ... + فہ_{ن-1} لا + فہ_ن = ۰$

ہے اور اس کی اصلیں ا، ب، ج، ..... ک ہیں تب ہمیں متماثل طور پر حاصل ہوتا ہے:

$$لا^ن + فہ_1 لا^{ن-1} + فہ_2 لا^{ن-2} + ... + فہ_{ن-1} لا + فہ_ن = (لا - ا)(لا - ب)(لا - ج)....(لا - ک)$$

پس دفعہ ۱۷۹ حصہ اوّل کی ترقیم کے موافق

$$لا^ن + فہ_1 لا^{ن-1} + فہ_2 لا^{ن-2} + ... + فہ_{ن-1} لا + فہ_ن$$

$$= لا^ن - ص_1 لا^{ن-1} + ص_2 لا^{ن-2} - ص_3 لا^{ن-3} + ...(-1)^{ن-1} ص_{ن-1} لا + (-1)^ن ص_ن$$

اس مساواتِ متماثلہ میں لا کی یکساں قوتوں کے سروں کو مساوی کرنے سے

$- فہ_1 = ص_1 =$ اصلوں کا مجموعہ

$فہ_2 = ص_2 =$ اصلوں کے حاصل ضربوں کا مجموعہ دو دو اصلوں کو اکٹھا لینے سے

$- فہ_3 = ص_3 =$ اصلوں کے حاصل ضربوں کا مجموعہ تین تین اصلوں کو اکٹھا لینے سے

.. ..

$(-1)^ن فہ_ن = ص_ن =$ اصلوں کا حاصل ضرب

اگر $لا^ن$ کا سر فہ$_0$ ہو تو ہر ایک رقم کو فہ$_0$ پر تقسیم کرنے سے مساوات بالا ہو جاتی ہے:

$$\text{لا}^{\text{ن}} + \frac{\text{فہ}_1}{\text{فہ}_0}\,\text{لا}^{\text{ن}-1} + \frac{\text{فہ}_2}{\text{فہ}_0}\,\text{لا}^{\text{ن}-2} + \ldots\ldots + \frac{\text{فہ}_{\text{ن}-1}}{\text{فہ}_0}\,\text{لا} + \frac{\text{فہ}_{\text{ن}}}{\text{فہ}_0} = 0$$

اور دفعہ ۵۲۱ کی ترقیم کی رُو سے

$$\Sigma\,\text{ا} = -\frac{\text{فہ}_1}{\text{فہ}_0}\ ،\ \Sigma\,\text{اب} = \frac{\text{فہ}_2}{\text{فہ}_0}\ ،\ \Sigma\,\text{ابج} = -\frac{\text{فہ}_3}{\text{فہ}_0}\ ،\ \ldots\ldots ،$$

$$\text{ابج}\ldots\ldots\text{ک} = (-1)^{\text{ن}}\,\frac{\text{فہ}_{\text{ن}}}{\text{فہ}_0}$$

مثال ۱- ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

$$\text{لا} + \text{ا}\,\text{ما} + \text{ا}^2\,\text{ی} = \text{ا}^3 ،\ \text{لا} + \text{ب}\,\text{ما} + \text{ب}^2\,\text{ی} = \text{ب}^3 ،\ \text{لا} + \text{ج}\,\text{ما} + \text{ج}^2\,\text{ی} = \text{ج}^3$$

اِن مساواتوں سے ہم دیکھتے ہیں کہ ا، ب، ج مقدارت کی قیمتیں ہیں جو کبھی مساوات

$$\text{ت}^3 - \text{ی}\,\text{ت}^2 - \text{ما}\,\text{ت} - \text{لا} = 0$$

کو پورا کرتی ہیں ۔

اسلئے $\text{ی} = \text{ا} + \text{ب} + \text{ج}$ ، $\text{ما} = -(\text{بج} + \text{جا} + \text{اب})$ ، $\text{لا} = \text{ابج}$

مثال ۲- اگر مساوات $\text{لا}^3 + \text{فہ}_1\,\text{لا}^2 + \text{فہ}_2\,\text{لا} + \text{فہ}_3 = 0$ کی اصلیں ا، ب، ج ہوں تو ایک مساوات بناؤ جسکی اصلیں ا^2، ب^2، ج^2 ہوں ۔

مساوات مطلوبہ یہ ہے: $(\text{ما} - \text{ا}^2)(\text{ما} - \text{ب}^2)(\text{ما} - \text{ج}^2) = 0$

یا $(\text{لا}^2 - \text{ا}^2)(\text{لا}^2 - \text{ب}^2)(\text{لا}^2 - \text{ج}^2) = 0$ اگر $\text{ما} = \text{لا}^2$

یعنی $(\text{لا} - \text{ا})(\text{لا} - \text{ب})(\text{لا} - \text{ج})(\text{لا} + \text{ا})(\text{لا} + \text{ب})(\text{لا} + \text{ج}) = 0$

لیکن $(\text{لا} - \text{ا})(\text{لا} - \text{ب})(\text{لا} - \text{ج}) = \text{لا}^3 + \text{فہ}_1\,\text{لا}^2 + \text{فہ}_2\,\text{لا} + \text{فہ}_3$

اسلئے $(\text{لا} + \text{ا})(\text{لا} + \text{ب})(\text{لا} + \text{ج}) = \text{لا}^3 - \text{فہ}_1\,\text{لا}^2 + \text{فہ}_2\,\text{لا} - \text{فہ}_3$

پس مساوات مطلوبہ یہ ہے :-

$$(\text{لا}^{3} + \text{فہ}_{1}\,\text{لا}^{2} + \text{فہ}_{2}\,\text{لا} + \text{فہ}_{3})(\text{لا}^{3} - \text{فہ}_{1}\,\text{لا}^{2} + \text{فہ}_{2}\,\text{لا} - \text{فہ}_{3}) = ۰$$

$$\text{یا}\quad (\text{لا}^{3} + \text{فہ}_{2}\,\text{لا})^{2} - (\text{فہ}_{1}\,\text{لا}^{2} + \text{فہ}_{3})^{2} = ۰$$

$$\text{یا}\quad \text{لا}^{6} + (۲\,\text{فہ}_{2} - \text{فہ}_{1}^{2})\,\text{لا}^{4} + (\text{فہ}_{2}^{2} - ۲\,\text{فہ}_{1}\,\text{فہ}_{3})\,\text{لا}^{2} - \text{فہ}_{3}^{2} = ۰$$

اور اگر ہم لا^{2} کی بجائے ما رکھیں تو

$$\text{ما}^{3} + (۲\,\text{فہ}_{2} - \text{فہ}_{1}^{2})\,\text{ما}^{2} + (\text{فہ}_{2}^{2} - ۲\,\text{فہ}_{1}\,\text{فہ}_{3})\,\text{ما} - \text{فہ}_{3}^{2} = ۰$$

۴۵ — شاید طالب علم یہ خیال کرے کہ دفعۂ ماقبل کے روابط ہر مفروضہ مساوات کے حل کرنے میں مدد دے سکتے ہیں کیونکہ روابط کی تعداد اصلوں کی تعداد کے مساوی ہے۔ ذرا سا غور کرنے سے معلوم ہو جائیگا کہ دراصل ایسا نہیں ہے۔ فرض کرو کہ ہم پہلے مقادیر ا، ب، ج، ..... ،ک میں سے ن - ۱ مقادیر کو ساقط کرتے ہیں اور اس طرح سے باقیماندہ ایک مقدار کی قیمت معلوم کرنے کے لئے ایک مساوات حاصل کرتے ہیں۔ تب چونکہ یہ مقادیر ہر مساوات میں متماثل طور پر شامل ہوتی ہیں، اس لئے ظاہر ہے کہ محصلہ مساوات ہر صورت میں معروھی ہونگے۔
اس لئے یہ مساوات دراصل ابتدائی مساوات ہی ہو گی جبکہ اصلوں ا، ب، ج ......، ک میں سے کسی ایک اصل کو لا کی بجائے لکھا جائے
ہم مثال کے طور پر مساوات ذیل پر غور کرتے ہیں:-

$$\text{لا}^{3} + \text{فہ}_{1}\,\text{لا}^{2} + \text{فہ}_{2}\,\text{لا} + \text{فہ}_{3} = ۰$$

فرض کرو کہ اس کی اصلیں ا، ب، ج ہیں، تب

$$\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} = -\,\text{فہ}_{1}$$

$$\text{اب} + \text{اج} + \text{ب ج} = \text{فہ}_{2}$$

$$\text{اب ج} = -\,\text{فہ}_{3}$$

ان مساواتوں کو بالترتیب $ا^۲$، $-ا$، ۱ سے ضرب دو اور جمع کرو۔

تب $ا^۳ = - ف_۱ ا^۲ - ف_۲ ا - ف_۳$

یعنی $ا^۳ + ف_۱ ا^۲ - ف_۲ ا + ف_۳ = ۰$

اور یہ ابتدائی مساوات ہی ہے جس میں لا کے بجائے ا لکھا گیا ہے۔ اسقاط کا مندرجہ بالا طریقہ بالکل عام ہے اور ہر درجہ کی مساوات پر اس کا اطلاق ہو سکتا ہے

۴۱۵۔ اگر ایک مساوات کی دو یا زیادہ اصلیں کسی مخصوص ربط کے ذریعہ مربوط ہوں تو دفعہ ۴۰۹ کے خواص کی مدد سے ہم بعض اوقات مکمل حل معلوم کر سکتے ہیں۔

مثال ۱۔ مساوات $۴ لا^۳ - ۲۴ لا^۲ + ۲۳ لا + ۱۸ = ۰$ کے حل معلوم کرو جبکہ اس کی اصلیں سلسلۂ حسابیہ میں ہوں۔

اصلوں کو ا - ب، ا، ا + ب سے تعبیر کرو، تب اصلوں کا مجموعہ ۳ا ہے، اصلوں کا حاصل ضرب دو دو اصلوں کو اکٹھا لینے سے $۳ا^۲ - ب^۲$ ہے اور اصلوں کا حاصل ضرب $ا(ا^۲ - ب^۲)$ ہے، پس ہمیں ذیل کی مساواتیں حاصل ہوتی ہیں:۔

$$۳ا = ۶ ، \quad ۳ا^۲ - ب^۲ = \frac{۲۳}{۴} ، \quad ا(ا^۲ - ب^۲) = -\frac{۹}{۲}$$

پہلی مساوات سے ہمیں حاصل ہوتا ہے ا = ۲، دوسری سے $ب = \pm \frac{۵}{۲}$ اور چونکہ یہ قیمتیں تیسری مساوات کو پورا کرتی ہیں، اس لئے یہ مساواتیں باہم مطابق ہیں

پس مطلوبہ اصلیں $-\frac{۱}{۲}$، ۲، $\frac{۹}{۲}$ ہیں۔

مثال ۲۔ مساوات $۲۴ لا^۳ - ۱۴ لا^۲ - ۶۳ لا + ۴۵ = ۰$ کو حل کرو جبکہ اس کی ایک اصل دوسری سے دو چند ہو۔

اصلوں کو ا، ۲ا، ب سے تعبیر کرو، تب ظاہر ہے کہ

$$۳ا + ب = \frac{۷}{۱۲} ، \quad ۲ا^۲ + ۳اب = -\frac{۲۱}{۸} ، \quad ۲ا^۲ب = -\frac{۱۵}{۸}$$

پہلی دو مساواتوں سے حاصل ہوتا ہے:۔

$$۸ ا^{۲} - ۲ ا - ۳ = ۰$$

$$\therefore\ ا = \frac{۳}{۴}\ \text{یا}\ -\frac{۱}{۲}\ \text{اور}\ ب = -\frac{۵}{۳}\ \text{یا}\ \frac{۲۵}{۱۲}$$

آزمایش سے معلوم ہوگا کہ قیمتیں $ا = -\frac{۱}{۲}$ ، $ب = \frac{۲۵}{۱۲}$ تیسری مساوات $۲ ا^{۲} ب = -\frac{۱۵}{۸}$ کو پورا نہیں کرتیں، اس لئے ہمارے پاس صرف یہ دو قیمتیں

$$ا = \frac{۳}{۴}\ \text{اور}\ ب = -\frac{۵}{۳}$$

رہ جاتی ہیں۔ لہذا مطلوبہ اصلیں $\frac{۳}{۴}$ ، $\frac{۳}{۲}$ ، $-\frac{۵}{۳}$ ہیں۔

۵۴۲۔ اگرچہ یہ ممکن ہے کہ ہم دفعہ ۵۳۹ کے روابط سے کسی مساوات کی اصلیں معلوم نہ کرسکیں لیکن ہم ان روابط کو اصلوں کے متشاکل تفاعلوں کی قیمتیں معلوم کرنے میں استعمال کر سکتے ہیں۔

مثال ۱۔ مساوات $لا^{۳} - ف لا^{۲} + ق لا - ر = ۰$ کی اصلوں کے مربعوں اور مکعبوں کے حاصل جمع معلوم کرو۔

فرض کرو کہ اصلیں ا ، ب اور ج ہیں، تب

$$ا + ب + ج = ف \quad \text{اور} \quad ب ج + ج ا + ا ب = ق$$

$$\text{اب}\ ا^{۲} + ب^{۲} + ج^{۲} = (ا + ب + ج)^{۲} - ۲ (ب ج + ج ا + ا ب)$$
$$= ف^{۲} - ۲ ق$$

نیز مساوات مفروضہ میں لا کی بجائے بالترتیب ا، ب، ج لکھنے اور جمع کرنے سے

$$ا^{۳} + ب^{۳} + ج^{۳} - ف (ا^{۲} + ب^{۲} + ج^{۲}) + ق (ا + ب + ج) - ۳ ر = ۰$$

$$\therefore\ ا^{۳} + ب^{۳} + ج^{۳} = ف (ف^{۲} - ۲ ق) - ف ق + ۳ ر$$
$$= ف^{۳} - ۳ ف ق + ۳ ر$$

مثال ۲۔ اگر مساوات $لا^{۴} + ف لا^{۳} + ق لا^{۲} + ر لا + س = ۰$ کی اصلیں ا، ب، ج، د ہوں تو $\sum ا^{۲} ب$ کی قیمت معلوم کرو

یہاں
$$ا + ب + ج + د = - ف \qquad (۱)$$
$$ا ب + ا ج + ا د + ب ج + ب د + ج د = ق \qquad (۲)$$
$$ا ب ج + ا ب د + ا ج د + ب ج د = - ر \qquad (۳)$$

ان مساواتوں سے $- ف ق = \sum ا^{۲} ب + ۳ (ا ب ج + ا ب د + ا ج د + ب ج د)$

$$= \sum ا^{۲}ب - ۳ر$$

$$\therefore \sum ا^{۲}ب = ۳ر - ف ق$$

امثلہ نمبری ۳۵ (ا)

وہ مساواتیں بناؤ جن کی اصلیں یہ ہیں:-

۱- $\frac{۲}{۳}$، $\frac{۳}{۲}$، $\pm\sqrt{۳}$ ۔ ۲ — ۰، ۰، ۲، ۲، −۳، ۱، −۳

۳— ۲، ۲، −۲، −۲، ۰، ۵ ۔ ۴ — ۱+ب، ۱−ب، −۱+ب، −۱−ب

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو:-

۵- $لا^{۴} - ۱۶لا^{۳} + ۸۶لا^{۲} - ۱۷۶لا + ۱۰۵ = ۰$ جبکہ دو اصلیں ۱ اور ۷ ہوں

۶- $۴لا^{۳} + ۱۶لا^{۲} - ۹لا - ۳۶ = ۰$ جبکہ دو اصلوں کا مجموعہ صفر ہو

۷- $۴لا^{۳} + ۲۰لا^{۲} - ۲۳لا + ۶ = ۰$ جبکہ دو اصلیں مساوی ہوں

۸- $۳لا^{۳} - ۲۶لا^{۲} + ۵۲لا - ۲۴ = ۰$ جبکہ اصلیں سلسلۂ ہندسیہ میں ہوں

۹- $۲لا^{۳} - لا^{۲} - ۲۲لا - ۲۴ = ۰$ جبکہ دو اصلیں نسبت ۳ : ۴ میں ہوں

۱۰- $۲۴لا^{۳} + ۴۶لا^{۲} + ۹لا - ۹ = ۰$ جبکہ ایک اصل دوسری اصل سے دگنی ہو

۱۱- $۸لا^{۴} - ۲لا^{۳} - ۲۷لا^{۲} + ۶لا + ۹ = ۰$ جبکہ دو اصلیں مساوی اور مختلف العلامت ہوں

۱۲- $۵۴لا^{۳} - ۳۹لا^{۲} - ۲۶لا + ۱۶ = ۰$ جبکہ اصلیں سلسلۂ ہندسیہ میں ہوں

۱۳- $۳۲لا^{۳} - ۴۸لا^{۲} + ۲۲لا - ۳ = ۰$ جبکہ اصلیں سلسلۂ حسابیہ میں ہوں

۱۴- $۶لا^{۴} - ۲۹لا^{۳} + ۴۰لا^{۲} - ۷لا - ۱۲ = ۰$ جبکہ دو اصلوں کا حاصل ضرب ۲ کے مساوی ہو۔

۱۵- $لا^{۴} - ۲لا^{۳} - ۲۱لا^{۲} + ۲۲لا + ۴۰ = ۰$ جبکہ اصلیں سلسلۂ حسابیہ میں ہوں

۱۶- $۲۷لا^{۴} - ۱۹۵لا^{۳} + ۴۹۴لا^{۲} - ۵۲۰لا + ۱۹۲ = ۰$ جبکہ اصلیں سلسلۂ ہندسیہ میں ہوں-

۱۷- $۱۸لا^{۳} + ۸۱لا^{۲} + ۱۲۱لا + ۶۰ = ۰$ جبکہ ایک اصل باقی دو اصلوں کے مجموعہ کے نصف کے مساوی ہو-

۱۸- اگر ا، ب، ج مساوات $لا^{۳} - ف لا^{۲} + ق لا - ر = ۰$ کی اصلیں ہوں تو

(۱) $\frac{۱}{ا^{۲}} + \frac{۱}{ب^{۲}} + \frac{۱}{ج^{۲}}$ (۲) $\frac{۱}{ب^{۲}ج^{۲}} + \frac{۱}{ج^{۲}ا^{۲}} + \frac{۱}{ا^{۲}ب^{۲}}$

کی قیمتیں معلوم کرو۔

۱۹۔ اگر ا، ب، ج مساوات لا^{3} + ق لا + ر = ۰ کی اصلیں ہوں تو

(۱) (ب - ج)^{2} + (ج - ا)^{2} + (ا - ب)^{2}　(۲) (ب + ج)$^{-1}$ + (ج + ا)$^{-1}$ + (ا + ب)$^{-1}$

۲۰۔ مساوات لا^{4} + ق لا^{2} + ر لا + س = ۰ کی اصلوں کے مربعوں اور مکعبوں کے حاصل جمع معلوم کرو۔

۲۱۔ مساوات لا^{3} + ق لا + ر = ۰ کی اصلوں کی چوتھی قوتوں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

۳۴۵۔ حقیقی سروں والی مساوات میں خیالی اصلوں کے زوج واقع ہوتے ہیں۔

فرض کرو کہ ف(لا) = ۰ حقیقی سروں والی ایک مساوات ہے اور اس کی ایک خیالی اصل ا + خ ب ہے، ہم ثابت کریں گے کہ ا - خ ب بھی اس کی ایک اصل ہوگی۔

اِن دو اصلوں کے متناظر ف(لا) کا جزوِ ضربی یہ ہے:۔

(لا - ا - خ ب)(لا - ا + خ ب) یا (لا - ا)^{2} + ب^{2}

ف(لا) کو (لا - ا)^{2} + ب^{2} پر تقسیم کرو اور فرض کرو کہ خارج قسمت ق ہے اور باقی (اگر کوئی ہے تو) ب′ لا + ب″ ہے

تب ف(لا) = ق{(لا - ا)^{2} + ب^{2}} + ب′ لا + ب″

اِس مساوات متماثلہ میں لا = ا + خ ب رکھو، تب ف(لا) حسب معطیات معدوم ہو جاتا ہے، نیز (لا - ا)^{2} + ب^{2} = ۰۔ اِسلئے ب′(ا + خ ب) + ب″ = ۰۔
حقیقی اور خیالی حصّوں کو مساوی کرنے سے

ب′ ا + ب″ = ۰　اور　ب′ ب = ۰۔

لیکن معطیات کی رُو سے ب صفر نہیں ہے

$\therefore$ ب = ۰ اور بَ = ۰

پس ف (لا) پورا تقسیم ہو جاتا ہے $(لا - ا)^۲ + ب^۲$ پر یعنی

(لا - ا - خ ب)(لا - ا + خ ب) پر

لہذا لا = ا - خ ب بھی ایک اصل ہے۔

۴۴۴ - دفعۂ ماقبل میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ اگر مساوات ف (لا) = ۰ کی دو خیالی اصلیں ا ± خ ب ہوں تو $(لا - ا)^۲ + ب^۲$ جملہ ف (لا) کا ایک جزو ضربی ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ ا ± خ ب، ج ± خ د، ع ± خ گ، ...... مساوات ف (لا) = ۰ کی خیالی اصلیں ہیں اور اِن خیالی اصلوں کے متناظر درجہ دوم کے اجزائے ضربی کا حاصل ضرب فہ (لا) ہے، تب

$$فہ(لا) = \{(لا - ا)^۲ + ب^۲\}\{(لا - ج)^۲ + د^۲\}\{(لا - ع)^۲ + گ^۲\} \ldots\ldots$$

اب لا کی ہر حقیقی قیمت کے لئے اِن اجزائے ضربی میں سے ہر ایک جزو ضربی مثبت ہے، پس لا کی حقیقی قیمتوں کے لئے فہ (لا) ہمیشہ مثبت ہے۔

۴۴۵ - دفعہ ۴۴۴ کی مانند ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ منطق سروں کی کسی مساوات میں اصم اصلوں کے زوج واقع ہوتے ہیں یعنی اگر $ا + \sqrt{ب}$ ایک اصل ہو تو $ا - \sqrt{ب}$ بھی ایک اصل ہوگی۔

مثال ۱ - مساوات $۶ لا^۴ - ۱۳ لا^۳ - ۳۵ لا^۲ - لا + ۳ = ۰$ کی ایک اصل $۲ - \sqrt{۳}$ ہے، مساوات کو حل کرو۔

چونکہ $۲ - \sqrt{۳}$ ایک اصل ہے اس لئے $۲ + \sqrt{۳}$ بھی ایک اصل ہوگی اور اصلوں کے اس زوج کے متناظر درجہ دوم کا ایک جزو ضربی $لا^۲ - ۴ لا + ۱$ ہے۔

نیز $۶ لا^۴ - ۱۳ لا^۳ - ۳۵ لا^۲ - لا + ۳ = (لا^۲ - ۴ لا + ۱)(۶ لا^۲ + ۱۱ لا + ۳)$

پس باقی اصلیں مساوات

$$۶ لا^۲ + ۱۱ لا + ۳ = ۰ \quad یا \quad (۳ لا + ۱)(۲ لا + ۳) = ۰$$

سے حاصل ہوتی ہیں ۔ لہٰذا مطلوبہ اصلیں یہ ہیں ۔

$$-\frac{۱}{۳}\ ،\ -\frac{۳}{۲}\ ،\ (۲+\sqrt{۳})\ ،\ (۲-\sqrt{۳})$$

مثال ۲ ۔ منطق سروں کی ایک مساوات درجہ چہارم بناؤ جس کی ایک اصل $\sqrt{۲}+\sqrt{-۳}$ ہو۔ ظاہر ہے کہ اصلوں کا ایک زوج $\sqrt{۲}+\sqrt{-۳}$ ، $\sqrt{۲}-\sqrt{-۳}$ ہوگا اور دوسرا زوج $-\sqrt{۲}+\sqrt{-۳}$ ، $-\sqrt{۲}-\sqrt{-۳}$ ہوگا۔

پہلے زوج کے متناظر درجہ دوم کا ایک جزوِ ضربی $\text{لا}^۲-۲\sqrt{۲}\,\text{لا}+۵$ اور دوسرے زوج کے متناظر درجہ دوم کا ایک جزوِ ضربی $\text{لا}^۲+۲\sqrt{۲}\,\text{لا}+۵$ ہے

پس مطلوبہ مساوات یہ ہے ۔

$$(\text{لا}^۲+۲\sqrt{۲}\,\text{لا}+۵)(\text{لا}^۲-۲\sqrt{۲}\,\text{لا}+۵)=۰$$

یعنی $(\text{لا}^۲+۵)^۲-۸\,\text{لا}^۲=۰$

یا $\text{لا}^۴+۲\,\text{لا}^۲+۲۵=۰$

مثال ۳ ۔ ثابت کرو کہ مساوات

$$\frac{\text{ا}^۲}{\text{لا}-\text{ا}}+\frac{\text{ب}^۲}{\text{لا}-\text{ب}}+\frac{\text{ج}^۲}{\text{لا}-\text{ج}}+\cdots\cdots+\frac{\text{ھ}^۲}{\text{لا}-\text{ھ}}=\text{ک}$$

کی کوئی خیالی اصل نہیں ۔

اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ $\text{ف}+\text{خ}\,\text{ق}$ ایک اصل ہے ، تب $\text{ف}-\text{خ}\,\text{ق}$ بھی ایک اصل ہے ، لا کی بجائے یہ قیمتیں درج کرو اور پہلے نتیجہ کو دوسرے نتیجہ میں سے تفریق کرو ، تب

$$\text{ق}\left\{\frac{\text{ا}^۲}{(\text{ف}-\text{ا})^۲+\text{ق}^۲}+\frac{\text{ب}^۲}{(\text{ف}-\text{ب})^۲+\text{ق}^۲}+\frac{\text{ج}^۲}{(\text{ف}-\text{ج})^۲+\text{ق}^۲}+\cdots+\frac{\text{ھ}^۲}{(\text{ف}-\text{ھ})^۲+\text{ق}^۲}\right\}=۰$$

اور یہ ممکن نہیں تاوقتیکہ $\text{ق}=۰$ ۔

۵۳۶ ۔ مساوات کی بعض اصلوں کی نوعیت معلوم کرنے کے لئے یہ ہمیشہ

ضروری نہیں ہوتا کہ مساوات مذکور کو حل کیا جائے۔ ذیل کے امور کی صحت از خود واضح اور بیّن ہے۔

(۱) اگر سر سب مثبت ہوں تو مساوات کی کوئی اصل مثبت نہیں ہو سکتی مثلاً مساوات $\text{لا}^{5} + \text{لا}^{3} + 2\,\text{لا} + 1 = 0$ کی کوئی اصل مثبت نہیں ہے۔

(۲) اگر لا کی جفت قوتوں کے سر سب یکساں علامت کے ہوں اور طاق قوتوں کے سر سب مختلف علامتوں کے ہوں تو مساوات کی کوئی منفی اصل نہیں ہو سکتی۔ مثلاً مساوات

$$\text{لا}^{7} + \text{لا}^{5} - 2\,\text{لا}^{4} + \text{لا}^{3} - 3\,\text{لا}^{2} + 7\,\text{لا} - 5 = 0$$

کی کوئی اصل منفی نہیں ہے۔

(۳) اگر مساوات میں لا کی صرف جفت قوتیں ہوں اور سر سب ایک ہی علامت کے ہوں تو مساوات کی کوئی حقیقی اصل نہیں ہوتی، مثلاً مساوات $2\,\text{لا}^{8} + 3\,\text{لا}^{4} + \text{لا}^{2} + 7 = 0$ کی کوئی حقیقی اصل نہیں ہے۔

(۴) اگر کسی مساوات میں لا کی صرف طاق قوتیں ہوں اور سب سر ایک ہی علامت کے ہوں تو مساوات کی کوئی حقیقی اصل نہیں ہوتی سوائے $\text{لا} = 0$۔ مثلاً مساوات $\text{لا}^{9} + 2\,\text{لا}^{5} + 3\,\text{لا}^{3} + \text{لا} = 0$ کی کوئی حقیقی اصل نہیں ہے سوائے $\text{لا} = 0$ کے۔

متذکرہ بالا کل نتیجے اگلی دفعہ کے مسئلہ میں شامل ہیں، اس مسئلہ کو ڈی کارٹ (Descarte) کی علامتوں کا قانون کہتے ہیں۔

۴۷۵۔ مساوات $\text{ف}(\text{لا}) = 0$ کی زیادہ سے زیادہ اتنی مثبت اصلیں ہو سکتی ہیں جتنی کہ $\text{ف}(\text{لا})$ میں علامتوں کی تبدیلیاں ہیں اور زیادہ سے زیادہ اتنی منفی علامتیں ہو سکتی ہیں جتنی کہ $\text{ف}(-\text{لا})$ میں علامتوں کی تبدیلیاں ہیں

فرض کرو کہ ایک کثیر الارقام جملہ کی رقوم کی علامتیں ++--+--- +-+- ہیں۔ ہم یہ دیکھیں گے کہ اگر اس کثیر الارقام جملہ کو ایک جملۂ ثنائی

سے جسکی علامتیں + - ہوں ضرب دیا جائے تو حاصل ضرب میں علامتوں کی تبدیلیوں کی جو تعداد ہوگی وہ ابتدائی جملہ کثیر الارقام کی علامتوں کی تبدیلیوں سے کم از کم ایک زیادہ ہوگی -

عمل ضرب میں رقموں کی محض علامتیں درج کرنے سے

$$- + - + - - - + - - + +$$

$$- +$$

$$- + - + - - - + - - + +$$

$$+ - + - + + + - + + - -$$

$$+ - + - + \mp \mp - + \mp - \pm +$$

ابتدائی جملہ اور حاصلِ ضرب کی علامتوں کا مقابلہ کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ

(۱) ابتدائی جملہ میں جب کوئی علامت مسلسل آتی ہے تو ہر تسلسل کے جواب میں حاصل ضرب میں مشتبہ علامت ہوتی ہے

(۲) مشتبہ علامت یا مشتبہ علامتوں کے پہلے اور بعد کی علامتیں مختلف ہیں۔

(۳) آخر میں علامت کی ایک مزید تبدیلی واقع ہوتی ہے -

اب سب سے زیادہ ناموافق صورت پر غور کرو، فرض کرو کہ سب مشتبہ علامتوں کی بجائے تسلسل بنا دئے گئے ہیں، تب (۲) سے ظاہر ہے کہ خواہ ہم مشتبہ علامتوں کو اُوپر کی علامتوں میں تبدیل کریں یا نیچے کی علامتوں میں، دونوں صورتوں میں علامتوں کی تبدیلیوں کی تعداد ایک ہی ہے۔اُوپر کی علامتیں لینے سے ہم دیکھتے ہیں کہ علامتوں کی تبدیلیوں کی تعداد

$$+ - + - + - - - + - - + +$$

کی تبدیلیوں کی تعداد سے کم نہیں ہوسکتی اور علامتوں کا یہ سلسلہ وہی ہے جو ابتدائی کثیر الارقام کا سلسلہ ہے سوائے اس کے آخر میں علامت کی ایک مزید تبدیلی واقع ہوئی ہے -

پس اگر ہم فرض کریں کہ منفی اور خیالی اصلوں کے متناظر اجزائے ضربی پہلے ضرب دئے جا چکے ہیں تو ظاہر ہے کہ محصلہ جملہ کو جزوِ ضربی

لا - ا سے ضرب دینے سے (جو ایک مثبت اصل کو تعبیر کرتا ہے) آخری حاصل ضرب میں کم از کم ایک مزید تبدیلئ علامت پیدا ہوگی۔ پس کسی مساوات کی مثبت اصلیں زیادہ سے زیادہ اتنی ہوسکتی ہیں جتنی کہ اس میں علامتوں کی تبدیلیاں ہیں۔

نیز مساوات ف (-لا) = ۰ کی اصلیں ف (لا) = ۰ کی اصلوں کے مساوی لیکن مختلف العلامت ہیں۔ اسلئے مساوات ف (لا) = ۰ کی منفی اصلیں ف (- لا) = ۰ کی مثبت اصلیں ہیں، لیکن ان مثبت اصلوں کی تعداد زیادہ سے زیادہ اتنی ہوسکتی ہے جتنی کہ ف (- لا) میں علامتوں کی تبدیلیاں ہیں یعنی ف (لا) = ۰ کی منفی اصلوں کی تعداد ف (- لا) کی علامتوں کی تبدیلیوں کی تعداد سے زیادہ نہیں ہوسکتی۔

مثال ۔ مساوات لا^{۹} + ۵ لا^{۸} - لا^{۳} + ۷ لا + ۲ = ۰ پر غور کرو۔

اِس میں علامتوں کی صرف دو تبدیلیاں ہیں، اس لئے مثبت اصلیں زیادہ سے زیادہ دو ہوسکتی ہیں۔

نیز ف (- لا) = - لا^{۹} + ۵ لا^{۸} + لا^{۳} - ۷ لا + ۲ = ۰

اس میں علامتوں کی صرف تین تبدیلیاں ہیں، اس لئے مفروضہ مساوات کی منفی اصلیں زیادہ سے زیادہ تین ہوسکتی ہیں۔ اس لئے لازماً مساوات زیرِ بحث کی کم از کم چار خیالی اصلیں ہونگی۔

امثلہ نمبری ۳۵ (ب)

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

۱ - ۳ لا^{۴} - ۱۰ لا^{۳} + ۴ لا^{۲} - لا - ۶ = ۰ جبکہ ایک اصل $\frac{۱ + \sqrt{-۳}}{۲}$ ہو

۲ - ۶ لا^{۴} - ۱۳ لا^{۳} - ۳۵ لا^{۲} - لا + ۳ = ۰ جبکہ ایک اصل ۲ - $\sqrt{۳}$ ہو

۳ - لا^{۴} + ۴ لا^{۳} + ۵ لا^{۲} + ۲ لا - ۲ = ۰ جبکہ ایک اصل -۱ + $\sqrt{-۱}$ ہو

۴- $لا^{۴} + ۴ لا^{۳} + ۶ لا^{۲} + ۴ لا + ۵ = ۰$ جبکہ ایک اصل $\sqrt{-۱}$ ہو

۵- مساوات $لا^{۵} - لا^{۴} + ۸ لا^{۲} - ۹ لا - ۱۵ = ۰$ جبکہ ایک اصل $\sqrt{۳}$ ہو اور دوسری $۱ - ۲\sqrt{-۱}$۔ کم سے کم ابعاد کی ایک ایسی مساوات بناؤ جسکے سر ناطق ہوں اور جسکی اصلوں میں سے ایک اصل یہ ہو:-

۶- $\sqrt{۳} + \sqrt{-۲}$　　　۷- $-\sqrt{-۱} + \sqrt{۵}$

۸- $-\sqrt{۲} - \sqrt{-۲}$　　　۹- $\sqrt{۵ + ۲\sqrt{۶}}$

۱۰- ایک مساوات بناؤ جسکی اصلیں یہ ہوں $\pm ۴\sqrt{۳}$ ، $۵ \pm ۲\sqrt{-۱}$

۱۱- ایک مساوات بناؤ جس کی اصلیں یہ ہوں $۱ \pm \sqrt{-۲}$ ، $۲ \pm \sqrt{-۳}$

۱۲- آٹھویں درجہ کی ایک منطق سروں والی مساوات بناؤ جس کی ایک اصل $\sqrt{۲} + \sqrt{۳} + \sqrt{-۱}$ ہو

۱۳- مساوات $۳ لا^{۴} + ۱۲ لا^{۲} + ۵ لا - ۴ = ۰$ کی اصلوں کی نوعیت معلوم کرو۔

۱۴- ثابت کرو کہ $۲ لا^{۷} - لا^{۴} + ۴ لا^{۳} - ۵ = ۰$ کی کم از کم چار خیالی اصلیں ہیں۔

۱۵- مساوات $لا^{۱۰} - ۴ لا^{۶} + لا^{۴} - ۲ لا - ۳ = ۰$ کی اصلوں کی بابت کیا نتیجہ نکالا جا سکتا ہے۔

۱۶- مساوات $لا^{۹} - لا^{۵} + لا^{۴} + لا^{۲} + ۱ = ۰$ کی خیالی اصلوں کی تعداد کم از کم کیا ہو سکتی ہے

۱۷- وہ شرط معلوم کرو کہ مساوات $لا^{۳} - ف لا^{۲} + ق لا - ر = ۰$ کی

(۱) دو اصلیں مساوی اور مختلف العلامت ہوں

(۲) اصلیں سلسلۂ ہندسیہ میں ہوں

۱۸- اگر مساوات $لا^{۴} + ف لا^{۳} + ق لا^{۲} + ر لا + س = ۰$ کی اصلیں سلسلۂ حسابیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ $ف^{۳} - ۴ ف ق + ۸ ر = ۰$ اور اگر یہ سلسلۂ ہندسیہ میں ہوں

تو ثابت کرو کہ ف۲س = ر

۱۹- اگر مساوات $لا^ن - ۱ = ۰$ کی اصلیں ۱، عہ، بہ، جہ، .... ہوں تو ثابت کرو کہ

$$(۱ - عہ)(۱ - بہ)(۱ - جہ) ..... = ن$$

اگر مساوات $لا^۳ - ف لا^۲ + ق لا - ر = ۰$ کی اصلیں ا، ب، ج ہوں تو ذیل کی مقادیر کی قیمتیں معلوم کرو۔

۲۰- $\sum ا^۲ ب^۲$ ۲۱-(ب + ج)(ج + ا)(ا + ب)

۲۲- $\sum \left(\frac{ب}{ج} + \frac{ج}{ب}\right)$ ۲۳- $\sum ا^۲ ب$

اگر مساوات $لا^۴ + ف لا^۳ + ق لا^۲ + ر لا + س = ۰$ کی اصلیں ا، ب، ج، د ہوں تو ذیل کی مقادیر کی قیمتیں معلوم کرو۔

۲۴- $\sum ا^۲ ب ج$ ۲۵- $\sum ا^۴$

۴۸۵- فا(لا + ھ) کی قیمت معلوم کرو جہاں فا(لا)، لا کا کوئی منطق صحیح تفاعل ہے،

فرض کرو کہ $فا(لا) = ف_۰ لا^ن + ف_۱ لا^{ن-۱} + ف_۲ لا^{ن-۲} + ...$

$+ ف_{ن-۱} لا + ف_ن$، تب

$$فا(لا + ھ) = ف_۰(لا + ھ)^ن + ف_۱(لا + ھ)^{ن-۱} + ف_۲(لا + ھ)^{ن-۲} + ...$$

$$.... + ف_{ن-۱}(لا + ھ) + ف_ن$$

سب رقموں کو بذریعہ مسئلہ ثنائی پھیلانے اور جواب کو ھ کی صعودی قوتوں کی ترتیب میں لکھنے سے

$$فا(لا + ھ) = ف_۰ لا^ن + ف_۱ لا^{ن-۱} + ف_۲ لا^{ن-۲} + ... + ف_{ن-۱} لا + ف_ن$$

$$+\text{ھ}\left\{\text{ن ف}_{.}\,\text{لا}^{\text{ن}-۱}+(\text{ن}-۱)\text{ف}_{۱}\,\text{لا}^{\text{ن}-۲}+(\text{ن}-۲)\text{ف}_{۲}\,\text{لا}^{\text{ن}-۳}+\ldots\ldots+\text{ف}_{\text{ن}-۱}\right\}$$

$$+\frac{\text{ھ}^{۲}}{\underline{|۲}}\left\{\text{ن}(\text{ن}-۱)\text{ف}_{.}\,\text{لا}^{\text{ن}-۲}+(\text{ن}-۱)(\text{ن}-۲)\text{ف}_{۱}\,\text{لا}^{\text{ن}-۳}+\ldots\ldots+۲\,\text{ف}_{\text{ن}-۲}\right\}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{\text{ھ}^{\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}}}\left\{\text{ن}(\text{ن}-۱)(\text{ن}-۲)\ldots\ldots۲\times۱\,\text{ف}_{.}\right\}$$

اِس نتیجہ کو بالعموم اِس شکل میں لکھا جاتا ہے

$$\text{فا}(\text{لا}+\text{ھ})=\text{فا}(\text{لا})+\text{ھ}\,\text{فاَ}(\text{لا})+\frac{\text{ھ}^{۲}}{\underline{|۲}}\text{فاً}(\text{لا})+\frac{\text{ھ}^{۳}}{\underline{|۳}}\text{فاًً}(\text{لا})+\ldots\ldots$$

$$+\frac{\text{ھ}^{\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}}}\text{فا}^{\text{ن}}(\text{لا})$$

اور تفاعیل فاَ(لا)، فاً(لا)، فاًً(لا)،.... فا^ن(لا) کو فا(لا) کا پہلا، دوسرا، تیسرا، ...... ن، واں تفاعل کہتے ہیں۔

وہ طالب علم جو احصائے تفرقات کے معمولی اصولوں سے واقف ہے اُس سے مخفی نہیں کہ فا(لا + ھ) کی مندرجہ بالا تفصیل ٹیلر (Taylor) کے مسئلہ کی ایک خاص صورت ہے، اس لئے تفاعیل فاَ(لا)، فاً(لا) وغیرہ تفرق کے معمولی ضوابط کی رُو سے بآسانی لکھے جا سکتے ہیں۔ مثلاً فا(لا) سے فاَ(لا) حاصل کرنے کے لئے فا(لا) کی ہر ایک رقم کو لا کی قوت سے ضرب دو اور قوت نما میں سے ایک کم کر دو۔

اِسی طرح مسلسل تفرق سے ہمیں فاً(لا)، فاًً(لا) کی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔

ھ کی بجائے - ھ لکھنے سے

$$\text{فا}(\text{لا}-\text{ھ})=\text{فا}(\text{لا})-\text{ھ}\,\text{فاَ}(\text{لا})+\frac{\text{ھ}^{۲}}{\underline{|۲}}\text{فاً}(\text{لا})-\frac{\text{ھ}^{۳}}{\underline{|۳}}\text{فاًً}(\text{لا})$$

$$+\ldots\ldots+(-۱)^{\text{ن}}\frac{\text{ھ}^{\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}}}\text{فا}^{\text{ن}}(\text{لا})$$

تفاعل فا(لا + ھ) صریحاً لا اور ھ کے لحاظ سے متشاکل ہے، لہٰذا

فا(لا + ھ) = فا(ھ) + لا فاَ(ھ) + (لا^{۲} / $\lfloor$۲) فاً(ھ) + ... + (لا^{ن} / $\lfloor$ن) فا^{ن}(ھ)

جہاں فاَ(ھ)، فاً(ھ)، فاً(ھ) ...... سے وہ نتیجے مراد ہیں جو متواتر مشتق تفاعلوں فاَ(لا)، فاً(لا)، فاً(لا) میں لا کی بجائے ھ رکھنے سے حاصل ہوتی ہیں

مثال ۔ اگر فا(لا) = ۲ لا^{۴} - لا^{۳} - ۲ لا^{۲} + ۵ لا - ۱ تو فا(لا + ۳) کی قیمت معلوم کرو۔

یہاں فا(لا) = ۲ لا^{۴} - لا^{۳} - ۲ لا^{۲} + ۵ لا - ۱　یعنی فا(۳) = ۱۳۱

فاَ(لا) = ۸ لا^{۳} - ۳ لا^{۲} - ۴ لا + ۵　اور فاَ(۳) = ۱۸۲

فاً(لا) / $\lfloor$۲ = ۱۲ لا^{۲} - ۳ لا - ۲　اور　فاً(۳) / $\lfloor$۲ = ۹۷

فاً(لا) / $\lfloor$۳ = ۸ لا - ۱　اور　فاً(۳) / $\lfloor$۳ = ۲۳

فا^{۴}(لا) / $\lfloor$۴ = ۲

پس فا(لا + ۳) = ۲ لا^{۴} + ۲۳ لا^{۳} + ۹۷ لا^{۲} + ۱۸۲ لا + ۱۳۱

مندرجہ بالا قیمت ہارنر (Horner) کے طریقہ سے زیادہ آسانی سے معلوم کی جاسکتی ہے
یہ طریقہ ذیل میں درج کیا جاتا ہے:-

۵۴۹ - فرض کرو کہ فا(لا) = ف$_{۰}$ لا^{ن} + ف$_{۱}$ لا$^{ن-۱}$ + ف$_{۲}$ لا$^{ن-۲}$ + ... + ف$_{ن-۱}$ لا + ف$_{ن}$

رکھو لا = ما + ھ اور فرض کرو کہ فا(لا) ہوجاتا ہے:-

ق$_{۰}$ ما^{ن} + ق$_{۱}$ ما$^{ن-۱}$ + ق$_{۲}$ ما$^{ن-۲}$ + ... + ق$_{ن-۱}$ ما + ق$_{ن}$

اب چونکہ ما = لا - ھ اس لئے ہمیں ذیل کی مساوات متماثلہ حاصل ہوتی ہے:-

ف$_{۰}$ لا^{ن} + ف$_{۱}$ لا$^{ن-۱}$ + ف$_{۲}$ لا$^{ن-۲}$ + ... + ف$_{ن-۱}$ لا + ف$_{ن}$

= ق$_{۰}$ (لا - ھ)^{ن} + ق$_{۱}$ (لا - ھ)$^{ن-۱}$ + ... + ق$_{ن-۱}$ (لا - ھ) + ق$_{ن}$

اس لئے $ق_ن$ باقی ہے جو فا(لا) کو لا - ھ پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔
نیز عملِ تقسیم سے جو خارج قسمت حاصل ہوتا ہے وہ یہ ہے:-

$$ق_۰(لا - ھ)^{ن-۱} + ق_۱(لا - ھ)^{ن-۲} + \dots\dots + ق_{ن-۱}$$

اسی طرح سے $ق_{ن-۱}$ باقی بچتی ہے جبکہ مندرجہ بالا جملہ کو لا - ھ پر تقسیم کیا جائے اور اس عملِ تقسیم سے جو خارج قسمت حاصل ہوتا ہے وہ یہ ہے:-

$$ق_۰(لا - ھ)^{ن-۲} + ق_۱(لا - ھ)^{ن-۳} + \dots\dots + ق_{ن-۲}$$

اور علیٰ ہذا القیاس، پس $ق_ن$، $ق_{ن-۱}$، $ق_{ن-۲}$ .... کی قیمتیں حسب کلیہ دفعہ ۵۱۵ نکل سکتی ہیں۔ آخری خارج قسمت $ق_۰$ ہے اور صریحاً $ف_۰$ کے مساوی ہے۔

جملہ $۲ لا^۴ - لا^۳ - ۲ لا^۲ + ۵ لا - ۱$

میں لا کو لا + ۳ میں بدل دینے سے کیا حاصل ہوتا ہے۔

یہاں ہم بالتواتر لا - ۳ پر تقسیم کرتے ہیں۔

		-۱	۵	-۲	-۱	۲
		۱۳۲	۳۹	۱۵	۶	
$ق_۴$	=	۱۳۳	۴۴	۱۳	۵	
			۱۳۸	۳۳	۶	
$ق_۳$	=		۱۸۲	۴۶	۱۱	
				۵۱	۶	
$ق_۲$	=			۹۷	۱۷	
					۶	
$ق_۱$	=				۲۳	

یا زیادہ مختصر طور پر اس طرح

-۱	۵	-۲	-۱	۲
۱۳۱	۴۴	۱۳	۵	۲
	۱۸۲	۴۶	۱۱	۲
		۹۷	۱۷	۲
			۲۳	۲
				۲

پس جوابِ مطلوبہ یہ ہے: $۲ لا^۴ + ۲۳ لا^۳ + ۹۷ لا^۲ + ۱۸۲ لا + ۱۳۱$

دفعہ ۵۴۸ سے مقابلہ کرو۔

یہ ذکر کردینا ضروری معلوم ہوتا ہے کہ ھارنر کا طریقہ عددی حسابات میں خاص طور پر مفید ہوتا ہے۔

۵۵۰ ۔ اگر متغیر لا، بتدریج بدل کر ا سے ب ہو جائے تو تفاعل فا(لا)، بتدریج بدل کر فا(ا) سے فا(ب) ہو جاتا ہے۔

فرض کرو کہ ج اور ج + ھ، لا کی ایسی دو قیمتیں ہیں جو ا اور ب کے درمیان واقع ہیں۔ تب

فا(ج + ھ) - فا(ج) = ھ فاَ(ج)

$+ \frac{ھ^۲}{\underline{|۲}}$ فاً(ج) + ... + $\frac{ھ^ن}{\underline{|ن}}$ فاُ(ج)

اب ھ کو کافی طور پر چھوٹا لینے سے فا(ج + ھ) اور فا(ج) کے فرق کو ہم اتنا کم کر سکتے ہیں جتنا چاہیں، اس لئے متغیر لا میں ایک چھوٹی تبدیلی پیدا کرنے سے تفاعل فا(لا) میں ایک تناظر چھوٹی تبدیلی پیدا ہوتی ہے، پس جب لا بتدریج بدل کر ا سے ب ہو جاتا ہے تو ف(لا) بتدریج بدلکر فا(ا) سے فا(ب) ہو جاتا ہے۔

۵۵۱ ۔ یہ بات قابلِ توجہ ہے کہ ہم نے یہ ثابت نہیں کیا ہے کہ فا(لا)، فا(ا) سے بڑھ کر فا(ب) ہو جاتا ہے یا فا(ا) سے گھٹ کر فا(ب) ہو جاتا ہے بلکہ صرف یہ ثابت کیا ہے کہ یہ بغیر کسی یک لخت تبدیلی کے بتدریج فا(ا) سے بدل کر فا(ب) ہوتا ہے۔ ممکن ہے کہ یہ اس تبدیلی کے دوران میں بعض اوقات بڑھتا ہو اور بعض اوقات کم ہوتا ہو۔

جو طالبعلم ترسیم منحنیات کے طریقہ سے واقف ہے منحنی ما = فا(لا) کی خاص صورتوں میں ترسیم بنانے سے فا(لا) کی قیمت کے تدریجی تغیرات کا معائنہ کر سکتا ہے۔

۵۵۲ ۔ اگر فا(ا) اور فا(ب) مختلف العلامت ہوں تو مساوات

فا (لا) = ۰ کی ایک اصل ا اور ب کے درمیان ضرور واقع ہوگی۔
جب لا بتدریج بدل کر ا سے ب ہو جاتا ہے تو فا (لا) بتدریج بدل کر فا (ا) سے فا (ب) ہو جاتا ہے اور ایسا کرنے میں فا (ا) اور فا (ب) کی کل مابینی قیمتیں اختیار کرتا ہے لیکن چونکہ فا (ا) اور فا (ب) مختلف العلامت ہیں اس لئے قیمت صفر ضرور ان کے درمیان ہوگی یعنی ا اور ب کے درمیان لا کی کسی نہ کسی قیمت کے لئے فا (لا) = ۰ ہوگا۔

اس سے یہ نتیجہ نہیں نکلتا کہ ا اور ب کے درمیان فا (لا) = ۰ کی صرف ایک ہی اصل ہے اور نہ ہی یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر فا (ا) اور فا (ب) کی علامت ایک ہی ہو تو مساوات فا (لا) = ۰ کی ا اور ب کے درمیان کوئی اصل نہیں ہے۔

۵۵۳ - طاق درجہ کی کسی مساوات کی کم از کم ایک اصل حقیقی ہوتی ہے اور اس کی علامت آخری رقم کی علامت کے برعکس ہوتی ہے۔
تفاعل فا (لا) میں لا کی بجائے بالترتیب $+\infty$، ۰، $-\infty$ درج کرنے سے

فا $(+\infty) = +\infty$، فا (۰) = $ف_ن$ اور فا $(-\infty) = -\infty$

اگر $ف_ن$ مثبت ہو تو فا (لا) = ۰ کی ایک اصل ۰ اور $-\infty$ کے درمیان ہے اور اگر $ف_ن$ منفی ہو تو فا (لا) = ۰ کی ایک اصل ۰ اور $+\infty$ کے درمیان ہوگی۔

۵۵۴ - اگر ایک مساوات کا درجہ جفت ہو اور اس کی آخری رقم منفی ہو تو اس مساوات کی کم از کم دو اصلیں حقیقی ہونگی جن میں سے ایک مثبت ہوگی اور دوسری منفی۔
اس صورت میں فا $(+\infty) = +\infty$، فا (۰) = $ف_ن$، فا $(-\infty) = +\infty$ لیکن $ف_ن$ منفی ہے، اس لئے فا (لا) = ۰ کی ایک اصل ۰ اور $+\infty$ کے درمیان ہے اور ایک اور اصل ۰ اور $-\infty$ کے درمیان ہے۔

۵۵۵۔ اگر جملے فا (ا) اور فا (ب) مختلف العلامت ہوں تو مساوات فا (لا) = ۰ کی اصلوں کی طاق تعداد ا اور ب کے درمیان واقع ہوگی اور اگر فا (ا) اور فا (ب) موافق العلامت ہوں تو یا مساوات مذکورہ کی اصلوں کی جُفت تعداد ا اور ب کے درمیان واقع ہوگی اور یا کوئی بھی اصل ا اور ب کے درمیان واقع نہ ہوگی۔

فرض کرو کہ ا بڑا ہے ب سے اور عہ، بہ، جبہ، ...کہ وہ تمام اصلیں ہیں فا (لا) = ۰ کی جو ا اور ب کے درمیان واقع ہوتی ہیں نیز فرض کرو کہ فا (لا) کو حاصل ضرب (لا - عہ)(لا - بہ)(لا - جبہ)....(لا - کہ) پر تقسیم کیا جائے تو خارج قسمت فہ (لا) نکلتا ہے۔ تب

فا (لا) = (لا - عہ)(لا - بہ)(لا - جبہ).......(لا - کہ) فہ (لا)

فا (ا) = (ا - عہ)(ا - بہ)(ا - جبہ).......(ا - کہ) فہ (ا)

فا (ب) = (ب - عہ)(ب - بہ)(ب - جبہ).......(ب - کہ) فہ (ب)

اب ضرور ہے کہ فہ (ا) اور فہ (ب) موافق العلامت ہوں ورنہ مساوات فہ (لا) = ۰ کی ایک اصل اور بنا بریں فا (لا) = ۰ کی ایک اصل ا اور ب کے درمیان واقع ہوگی جو معطیات کے خلاف ہے۔ پس اگر فا (ا) اور فا (ب) مختلف العلامت ہوں تو جملے

(ا - عہ)(ا - بہ)(ا - جبہ)........(ا - کہ)

اور (ب - عہ)(ب - بہ)(ب - جبہ)........(ب - کہ)

بھی مختلف العلامت ہونگے۔ نیز پہلے جملے کے سب اجزائے ضربی مثبت ہیں اور دوسرے کے سب اجزائے ضربی منفی ہیں اس لیے اجزائے ضربی کی تعداد لازماً طاق ہوگی یعنی اصلوں عہ، بہ، جبہ، ....کہ کی تعداد طاق ہوگی۔

اسی طرح سے اگر فا (ا) اور فا (ب) کی علامتیں ایک ہی ہوں تو اجزائے ضربی کی تعداد جُفت ہوگی۔ اس صورت میں شرط مذکورہ پوری ہوگی اگر عہ، بہ، جبہ، ..... کہ سب بڑے ہوں ا سے یا کم ہوں ب سے پس یہ لازم نہیں آتا کہ فا (لا) = ۰ کی کوئی اصل ا اور ب کے درمیان ہے۔

۵۵۶ - اگر ا ، ب ، ج ، ....ک مساوات فا(لا) = ۰ کی اصلیں ہوں تو

فا(لا) = ف(لا - ا)(لا - ب)(لا - ج) .... (لا - ک)

جہاں مقادیر ا ، ب ، ج ،.....ک لازمی طور پر غیر مساوی نہیں ہیں، اگر ان میں سے ر اصلیں ا کے مساوی ہوں، س اصلیں ب کے مساوی اور ط اصلیں ج کے مساوی ہوں .... تو

فا(لا) = ف(لا - ا)^ر (لا - ب)^س (لا - ج)^ط .. ..

اس صورت میں بھی یہی کہنا سہولت بخش ہے کہ مساوات فا(لا) = ۰ کی ن اصلیں ہیں جبکہ مساوی اصلوں میں سے ہر ایک کو الگ خیال کیا جائے۔

۵۵۷ - اگر مساوات فا(لا) = ۰ کی ر اصلیں ا کے مساوی ہوں تو مساوات فاَ(لا) = ۰ کی ر - ۱ اصلیں ا کے مساوی ہونگی۔

فرض کرو کہ فد(لا) خارج قسمت ہے جبکہ فا(لا) کو (لا - ا)^ر پر تقسیم کیا جائے۔ تب فا(لا) = (لا - ا)^ر فد(لا)

لا کی بجائے لا + ھ رکھو

فا(لا + ھ) = (لا - ا + ھ)^ر فد(لا + ھ)

∴ فا(لا) + ھ فاَ(لا) + ھ^۲/۲ فاً(لا) + ...

= {(لا - ا)^ر + ر(لا - ا)^(ر-۱) ھ + ...} {فد(لا) + ھ فدَ(لا) + ھ^۲/۲ فدً(لا) + ...}

اس مساوات متماثلہ میں ھ کے سروں کو مساوی کرنے سے

فاَ(لا) = ر(لا - ا)^(ر-۱) فد(لا) + (لا - ا)^ر فدَ(لا)

پس فاَ(لا) میں جزو ضربی لا - ا ، ر - ۱ بار شامل ہے یعنی مساوات فاَ(لا) = ۰ کی (ر - ۱) اصلیں ا کے مساوی ہیں۔

اِسی طرح سے ہم دکھا سکتے ہیں کہ اگر مساوات فا(لا) = ۰ کی س اصلیں ب کے مساوی ہوں تو فا'(لا) = ۰ کی س-۱ اصلیں ب کے مساوی ہونگی اور علیٰ ہذا القیاس۔

۵۵۸ - متذکرہ بالا ثبوت سے ظاہر ہے کہ اگر فا(لا) میں جزوِ ضربی (لا-ا)^{ر} شامل ہو تو فا'(لا) میں جزوِ ضربی (لا-ا)$^{ر-۱}$ شامل ہوگا۔ پس فا(لا) اور فا'(لا) میں جزوِ ضربی (لا-ا)$^{ر-۱}$ مشترک ہوگا۔ لہذا اگر فا(لا) اور فا'(لا) میں کوئی جزوِ ضربی مشترک نہ ہو تو ظاہر ہے کہ فا(لا) میں کوئی جزوِ ضربی ایک سے زیادہ بار شامل نہیں ہے، پس مساوات فا(لا) = ۰ کی اصلیں مساوی ہونگی اگر فا(لا) اور فا'(لا) میں کوئی مشترک جزوِ ضربی ہو اور مساوی نہیں ہونگی اگر ان میں کوئی جزوِ ضربی مشترک نہ ہو۔

۵۵۹ - دفعۂ ماقبل سے ظاہر ہے کہ مساوات فا(لا) = ۰ کی مساوی اصلیں حاصل کرنے کے لئے ہمیں پہلے فا(لا) اور فا'(لا) کا مقسوم علیہ اعظم معلوم کرنا چاہئے۔

مثال ۱- مساوات لا^{۴} - ۱۱ لا^{۳} + ۴۴ لا^{۲} - ۷۶ لا + ۴۸ = ۰ میں مساوی اصلیں ہیں، مساوات کو حل کرو۔

یہاں فا(لا) = لا^{۴} - ۱۱ لا^{۳} + ۴۴ لا^{۲} - ۷۶ لا + ۴۸

فا'(لا) = ۴ لا^{۳} - ۳۳ لا^{۲} + ۸۸ لا - ۷۶

اب ہم حسبِ معمول یہ معلوم کر سکتے ہیں کہ فا(لا) اور فا'(لا) کا عادِ اعظم لا-۲ ہے، اس لئے (لا-۲)^{۲} ایک جزوِ ضربی ہے فا(لا) کا اور

فا(لا) = (لا-۲)^{۲} (لا^{۲} - ۷ لا + ۱۲)

= (لا-۲)^{۲} (لا-۳) (لا-۴)

پس اصلیں ۲، ۲، ۳ اور ۴ ہیں۔

مثال ۲- اِس کے لئے شرط معلوم کرو کہ مساوات ا لا^{۳} + ۳ ب لا^{۲} + ۳ ج لا + د = ۰ کی دو اصلیں مساوی ہوں۔

اِس صورت میں مساواتیں فا(لا) = ۰ اور فاَ(لا) = ۰ یعنی

$$\text{ا}\,\text{لا}^3 + 3\,\text{ب}\,\text{لا}^2 + 3\,\text{ج}\,\text{لا} + \text{د} = 0 \quad \ldots\ldots (1)$$

$$\text{ا}\,\text{لا}^2 + 2\,\text{ب}\,\text{لا} + \text{ج} = 0 \quad \ldots\ldots (2)$$

کی ایک اصل مشترک ہوگی اور شرطِ مطلوبہ اِن مساواتوں میں سے لا کو ساقط کرنے سے حاصل ہوسکتی ہے۔

(۱) کو (۲) کے ساتھ ملانے سے

$$\text{ب}\,\text{لا}^2 + 2\,\text{ج}\,\text{لا} + \text{د} = 0 \quad \ldots\ldots (3)$$

(۲) اور (۳) سے

$$\frac{\text{لا}^2}{2(\text{ب}\,\text{د} - \text{ج}^2)} = \frac{\text{لا}}{\text{ب}\,\text{ج} - \text{ا}\,\text{د}} = \frac{1}{2(\text{ا}\,\text{ج} - \text{ب}^2)}$$

پس شرط مطلوبہ یہ ہے

$$(\text{ب}\,\text{ج} - \text{ا}\,\text{د})^2 = 4(\text{ا}\,\text{ج} - \text{ب}^2)(\text{ب}\,\text{د} - \text{ج}^2)$$

۵۶۰ — ہم دیکھ چکے ہیں کہ اگر مساوات فا(لا) = ۰ کی ر اصلیں ا کے مساوی ہوں تو مساوات فاَ(لا) = ۰ کی ر − ۱ اصلیں ا کے مساوی ہونگی۔ لیکن فاً(لا) فاَ(لا) کا پہلا مشتق تفاعل ہے۔ اس لئے مساوات فاً(لا) = ۰ کی ر − ۲ اصلیں ا کے مساوی ہونگی، اسی طرح سے فاً(لا) = ۰ کی ر − ۳ اصلیں ا کے مساوی ہونگی اور علیٰ ہٰذا القیاس — اِن امور کا لحاظ کرتے ہوئے ہم مساوات فا(لا) = ۰ کی مساوی اصلیں دفعہ ۵۵۹ کے قاعدہ کی نسبت زیادہ آسانی سے معلوم کرسکتے ہیں۔

۵۶۱ — اگر ا، ب، ج، د ...... ، ک مساوات فا(لا) = ۰ کی اصلیں ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\text{فاَ}(\text{لا}) = \frac{\text{فا}(\text{لا})}{\text{لا} - \text{ا}} + \frac{\text{فا}(\text{لا})}{\text{لا} - \text{ب}} + \frac{\text{فا}(\text{لا})}{\text{لا} - \text{ج}} + \ldots\ldots + \frac{\text{فا}(\text{لا})}{\text{لا} - \text{ک}}$$

ظاہر ہے کہ فا(لا) = (لا − ا)(لا − ب)(لا − ج) ...... (لا − ک)

لا کی بجائے لا + ھ لکھنے سے

فا(لا + ھ) = (لا − ا + ھ)(لا − ب + ھ)(لا − ج + ھ)……(لا − ک + ھ) ……(۱)

لیکن فا(لا + ھ) = فا(لا) + ھ فاَ(لا) + (ھ^۲/۲!) فاً(لا) + ……

اِس لئے فاَ(لا)، (۱) کے بائیں جانب کے رُکن میں ھ کے سر کے مساوی ہے، لہٰذا دفعہ ۱۶۳ کے بموجب

فاَ(لا) = (لا − ب)(لا − ج)……(لا − ک) + (لا − ا)(لا − ج)……(لا − ک) + ……

یعنی فاَ(لا) = فا(لا)/(لا − ا) + فا(لا)/(لا − ب) + فا(لا)/(لا − ج) + …… + فا(لا)/(لا − ک)

۵۶۲ – دفعۂ ماقبل کے نتیجہ کی مدد سے ہم کسی مساوات کی اصلوں کی کسی خاص قوت کا حاصل جمع نہایت آسانی سے معلوم کرسکتے ہیں۔

مثال۔ اگر مساوات

لا^۵ + ف لا^۳ + ق لا^۲ + ت = ۰

کی اصلوں کی ک، ویں قوتوں کے حاصل جمع کو ج_ک سے تعبیر کیا جائے تو ج_۴، ج_۶، ج_{-۴} کی قیمتیں معلوم کرو۔

فرض کرو کہ فا(لا) = لا^۵ + ف لا^۳ + ق لا^۲ + ت

تب فاَ(لا) = ۵ لا^۴ + ۳ ف لا^۲ + ۲ ق لا

اب فا(لا)/(لا − ا) = لا^۴ + (ا + ف) لا^۳ + (ا^۲ + ا ف) لا^۲ + (ا^۳ + ا^۲ ف + ق) لا + ا^۴ + ا^۳ ف + ا ق

اور ایسے ہی $\frac{\text{فا(لا)}}{\text{لا - ب}}$ ، $\frac{\text{فا(لا)}}{\text{لا - ج}}$ ، $\frac{\text{فا(لا)}}{\text{لا - د}}$ ، $\frac{\text{فا(لا)}}{\text{لا - ع}}$ کیلئے متشابہ جملات

پس جمع کرنے سے

۵لا^{۴} + ۴ف لا^{۳} + ۲ق لا = ۵لا^{۴} + (ج$_{۱}$ + ۵ف)لا^{۳} + (ج$_{۲}$ + ف ج$_{۱}$)لا^{۲}

+ (ج$_{۳}$ + ف ج$_{۲}$ + ۵ق)لا + (ج$_{۴}$ + ف ج$_{۳}$ + ق ج$_{۱}$)

سروں کو متعاول کرنے سے

ج$_{۱}$ + ۵ف = ۴ف جس سے ج$_{۱}$ = -ف

ج$_{۲}$ + ف ج$_{۱}$ = ۰ جس سے ج$_{۲}$ = ف^{۲}

ج$_{۳}$ + ف ج$_{۲}$ + ۵ق = ۲ق جس سے ج$_{۳}$ = -ف^{۳} - ۳ق

ج$_{۴}$ + ف ج$_{۳}$ + ق ج$_{۱}$ = ۰ جس سے ج$_{۴}$ = ف^{۳} + ۴ف ق

ک کی کسی اور قیمت کے لئے ہم ج$_{ک}$ کی قیمت حسب ذیل طریقہ سے معلوم کر سکتے ہیں۔

مساوات مفروضہ کو لا$^{ک-۵}$ سے ضرب دینے سے

لا^{ک} + ف لا$^{ک-۲}$ + ق لا$^{ک-۳}$ + ت لا$^{ک-۵}$ = ۰

لا کی بجائے بالترتیب قیمتیں ا، ب، ج، د، ع رکھنے اور نتائج کو جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے

ج$_{ک}$ + ف ج$_{ک-۲}$ + ق ج$_{ک-۳}$ + ت ج$_{ک-۵}$ = ۰

ک = ۵ رکھو، تب ج$_{۵}$ + ف ج$_{۳}$ + ق ج$_{۲}$ + ۵ت = ۰

جس سے ج$_{۵}$ = -ف^{۵} - ۵ف^{۲}ق - ۵ت

ک = ۶ رکھو، تب ج$_{۶}$ + ف ج$_{۴}$ + ق ج$_{۳}$ + ت ج$_{۱}$ = ۰

جس سے ج$_{۶}$ = ف^{۶} + ۶ف^{۳}ق + ۳ق^{۲} + ۶ف ت

ج_{-4} کی قیمت معلوم کرنے کے لئے ک کو بالتسلسل ۴، ۳، ۲، ۱ کے مساوی فرض کرو، تب

$$\text{ج}_4 + \text{ف}\,\text{ج}_2 + \text{ق}\,\text{ج}_1 + \text{ت}\,\text{ج}_{-1} = 0 \quad \text{جس سے} \quad \text{ج}_{-1} = 0$$

$$\text{ج}_3 + \text{ف}\,\text{ج}_1 + 5\,\text{ق} + \text{ت}\,\text{ج}_{-2} = 0 \quad \text{جس سے} \quad \text{ج}_{-2} = -\frac{2\,\text{ق}}{\text{ت}}$$

$$\text{ج}_2 + \text{ف}\,\text{ج}_1 + \text{ق}\,\text{ج}_{-1} + \text{ت}\,\text{ج}_{-3} = 0 \quad \text{جس سے} \quad \text{ج}_{-3} = 0$$

$$\text{ج}_1 + 5\,\text{ف} + \text{ق}\,\text{ج}_{-2} + \text{ت}\,\text{ج}_{-4} = 0 \quad \text{جس سے} \quad \text{ج}_{-4} = \frac{2\,\text{ق}^2}{\text{ت}^2} - \frac{4\,\text{ف}}{\text{ت}}$$

۵۶۳ - جب سر عددی ہوں تو ہم مندرجہ ذیل مثال کے طریقے کے مطابق عمل کر سکتے ہیں۔

مثال - مساوات $\text{لا}^3 - 2\,\text{لا}^2 + \text{لا} - 1 = 0$ کی اصلوں کی چوتھی قوتوں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

یہاں $\text{فا}(\text{لا}) = \text{لا}^3 - 2\,\text{لا}^2 + \text{لا} - 1$

$$\text{فا}'(\text{لا}) = 3\,\text{لا}^2 - 4\,\text{لا} + 1$$

نیز

$$\frac{\text{فا}'(\text{لا})}{\text{فا}(\text{لا})} = \frac{1}{\text{لا} - \text{ا}} + \frac{1}{\text{لا} - \text{ب}} + \frac{1}{\text{لا} - \text{ج}}$$

$$= \Sigma\left(\frac{1}{\text{لا}} + \frac{\text{ا}}{\text{لا}^2} + \frac{\text{ا}^2}{\text{لا}^3} + \frac{\text{ا}^3}{\text{لا}^4} + \cdots\right)$$

$$= \frac{3}{\text{لا}} + \frac{\text{ج}_1}{\text{لا}^2} + \frac{\text{ج}_2}{\text{لا}^3} + \frac{\text{ج}_3}{\text{لا}^4} + \cdots$$

لہذا ج_4 اُس خارج قسمت میں جو $\text{فا}'(\text{لا})$ کو $\text{فا}(\text{لا})$ پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوتا ہے $\frac{1}{\text{لا}^5}$ کے سر کے مساوی ہے، خارج قسمت مذکور تقسیم ترکیبی کے طریقۂ ذیل سے بآسانی حاصل ہو سکتا ہے۔

۱	۱ + ۴ − ۳
۲	۳ + ۳ − ۶
−۱	۲ + ۲ − ۴
۱	۲ + ۲ − ۴
±	۵ + ۵ − ۱۰

۳ + ۲ + ۲ + ۵ + ۱۰ − ۳ + ۵ ......

پس خارج قسمت یہ ہے $\frac{۳}{لا} + \frac{۲}{لا^{۲}} + \frac{۲}{لا^{۳}} + \frac{۵}{لا^{۴}} + \frac{۱۰}{لا^{۵}} + \ldots\ldots$

لہٰذا　ج = ۱۰

امثلہ نمبری ۳۵ (ج)

(۱) اگر فا(لا) = لا^{۴} + ۱۰ لا^{۳} + ۳۹ لا^{۲} + ۷۶ لا + ۶۵ تو فا(لا − ۴) کی قیمت معلوم کرو۔

(۲) اگر فا(لا) = لا^{۴} − ۱۲ لا^{۳} + ۱۷ لا^{۲} − ۹ لا + ۷ تو فا(لا + ۳) کی قیمت دریافت کرو۔

(۳) اگر فا(لا) = ۲ لا^{۴} − ۱۳ لا^{۲} + ۱۰ لا − ۱۹ تو فا(لا + ۱) کی قیمت معلوم کرو۔

(۴) اگر فا(لا) = لا^{۴} + ۱۶ لا^{۳} + ۷۲ لا^{۲} + ۶۴ لا − ۱۲۹ تو فا(لا − ۴) کی قیمت معلوم کرو۔

(۵) اگر فا(لا) = ا لا^{۳} + ب لا^{۲} + ج لا + د تو فا(لا + ہ) − فا(لا − ہ) کی قیمت معلوم کرو۔

(۶) ثابت کرو کہ مساوات ۱۰ لا^{۳} − ۱۷ لا^{۲} + لا + ۶ = ۰ کی ایک اصل صفر اور −۱ کے درمیان ہے۔

(۷) ثابت کرو کہ مساوات لا^{۴} − ۵ لا^{۳} + ۳ لا^{۲} + ۳۵ لا − ۷۰ = ۰ کی ایک اصل ۲ اور ۳ کے درمیان ہے اور دوسری −۲ اور −۳ کے درمیان ہے۔

۸ - ثابت کرو کہ مساوات $لا^{۴} - ۱۲ لا^{۲} + ۱۲ لا - ۳ = ۰$ کی ایک اصل -۳ اور -۴ کے درمیان ہے اور دوسری ۲ اور ۳ کے درمیان -

۹ - ثابت کرو کہ مساوات $لا^{۵} + ۵ لا^{۴} - ۲۰ لا^{۲} - ۱۹ لا - ۲ = ۰$ کی ایک اصل ۲ اور ۳ کے درمیان ہے اور دوسری -۴ اور -۵ کے درمیان -

ذیل کی مساواتوں کی اصلیں مساوی ہیں، ان کو حل کرو:

۱۰ - $لا^{۴} - ۹ لا^{۲} + ۴ لا + ۱۲ = ۰$ ۱۱ - $لا^{۴} - ۶ لا^{۳} + ۱۲ لا^{۲} - ۱۰ لا + ۳ = ۰$

۱۲ - $لا^{۵} - ۱۳ لا^{۴} + ۶۷ لا^{۳} - ۱۷۱ لا^{۲} + ۲۱۶ لا - ۱۰۸ = ۰$

۱۳ - $لا^{۵} - لا^{۳} + ۴ لا^{۲} - ۳ لا + ۲ = ۰$

۱۴ - $۸ لا^{۴} + ۴ لا^{۳} - ۱۸ لا^{۲} + ۱۱ لا - ۲ = ۰$

۱۵ - $لا^{۶} - ۳ لا^{۵} + ۶ لا^{۳} - ۳ لا^{۲} - ۳ لا + ۲ = ۰$

۱۶ - $لا^{۶} - ۲ لا^{۵} - ۴ لا^{۴} + ۱۲ لا^{۳} - ۳ لا^{۲} - ۱۸ لا + ۱۸ = ۰$

۱۷ - $لا^{۴} - (ا + ب) لا^{۳} - ا (ا - ب) لا^{۲} + ا^{۲}(ا + ب) لا - ا^{۳} ب = ۰$

ذیل کی مساواتوں کی اصلیں مساوی ہیں، ان کو حل کرو

۱۸ - $۲ لا^{۴} - ۲ لا^{۳} + لا^{۲} + ۳ لا - ۶ = ۰$ ، $۴ لا^{۴} - ۲ لا^{۳} + ۳ لا - ۹ = ۰$

۱۹ - $۴ لا^{۴} + ۱۲ لا^{۳} - لا^{۲} - ۱۵ لا = ۰$ ، $۶ لا^{۴} + ۱۳ لا^{۳} - ۴ لا^{۲} - ۱۵ لا = ۰$

۲۰ - اِسکے لئے شرط معلوم کرو کہ $لا^{ن} - ف لا^{۲} + ر = ۰$ کی اصلیں مساوی ہوں -

۲۱ - ثابت کرو کہ مساوات $لا^{۳} + ق لا^{۲} + س = ۰$ کی تین اصلیں مساوی نہیں ہوسکتیں -

۲۲ - بتاؤ کہ ب کو ا سے کیا نسبت ہو کہ مساواتوں

$ا لا^۲ + ب لا + ا = ۰$ اور $لا^۳ - ۲ لا^۲ + ۲ لا - ۱ = ۰$

کی (۱) ایک اصل (۲) دو اصلیں مساوی ہوں۔

(۲۳) ثابت کرو کہ مساوات

$$لا^ن + ن لا^{ن-۱} + ن(ن-۱) لا^{ن-۲} + ... + \underline{ن} = ۰$$

کی اصلیں مساوی نہیں ہوسکتیں۔

(۲۴) اگر مساوات $لا^۵ - ۱۰ ا^۳ لا^۲ + ب^۴ لا + ج^۵ = ۰$ کی تین اصلیں مساوی ہوں تو ثابت کرو $ا ب^۴ - ۹ ا^۵ + ج^۵ = ۰$۔

(۲۵) اگر مساوات $لا^۴ + ا لا^۳ + ب لا^۲ + ج لا + د = ۰$ کی تین اصلیں مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ ان میں سے ہر ایک $\frac{۶ ج - ا ب}{۳ ا^۲ - ۸ ب}$ کے مساوی ہے۔

(۲۶) اگر $لا^۵ + ق لا^۳ + ر لا^۲ + ت = ۰$ کی دو اصلیں باہم مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ اُن میں سے ایک اصل ذیل کی مساوات درجہ دوم $۱۵ ر لا^۲ - ۶ ق^۲ لا + ۲۵ ت - ۴ ق ر = ۰$ کی ایک اصل کے مساوی ہوگی۔

(۲۷) مساوات $لا^۳ - لا - ۱ = ۰$ میں $ج_۶$ کی قیمت معلوم کرو۔

(۲۸) مساوات $لا^۴ - لا^۳ - ۷ لا^۲ + لا + ۶ = ۰$ میں $ج_۴$ اور $ج_۶$ کی قیمتیں معلوم کرو۔

مساواتوں کی تبدیل یا استحالہ

۵۶۴۔ بعض اوقات کسی مساوات کے متعلق بحث زیادہ آسان ہو جاتی ہے اگر اس مساوات کو ایک ایسی مساوات میں تبدیل کرلیا جائے جسکی اصلیں اوّل الذکر مساوات کی اصلوں کے ساتھ کوئی خاص ربط رکھتی ہوں، اس قسم کی تبدیلیاں بالخصوص کعبی مساوات یعنی مساوات درجہ سوم کے حل میں زیادہ مفید ہوتی ہیں۔

۵۶۵ - ایک مساوات کو ایک اور ایسی مساوات میں تبدیل کرو جسکی اصلیں مفروضہ مساوات کی اصلوں کے مساوی اور مختلف العلامت ہوں -

فرض کرو کہ فا (لا) = ۰ مساواتِ مفروضہ ہے -

لا کی بجائے - ما رکھو، تب مساوات فا (- ما) = ۰، مساوات فا (لا) = ۰ کی ہر اصل سے پوری ہوتی ہے جبکہ اس اصل کی علامت کو بدل دیا جائے، پس مساوات مطلوبہ فا (- ما) = ۰ ہے -

اگر مساوات مفروضہ

$$ف_۰ لا^{ن} + ف_۱ لا^{ن-۱} + ف_۲ لا^{ن-۲} + \ldots\ldots + ف_{ن-۱} لا + ف_{ن} = ۰$$

ہو تو ظاہر ہے کہ مساوات مطلوبہ حسب ذیل ہوگی جو اوپر کی مساوات میں دوسری رقم سے شروع ہوکر متبادل رقوم کی علامتیں بدلنے سے حاصل ہوتی ہے -

$$ف_۰ ما^{ن} - ف_۱ ما^{ن-۱} + ف_۲ ما^{ن-۲} - \ldots\ldots + (-۱)^{ن-۱} ف_{ن-۱} ما + (-۱)^{ن} ف_{ن} = ۰$$

۵۶۶ - ایک مساوات کو ایک اور ایسی مساوات میں تبدیل کرو جس کی اصلیں اُن حاصل ضربوں کے مساوی ہوں جو ابتدائی مساوات کی اصلوں کو ایک خاص مقدار سے ضرب دینے سے حاصل ہوتے ہیں -

فرض کرو کہ فا (لا) = ۰ مساواتِ مفروضہ ہے اور ق مذکورہ بالا مقدارِ خاص کو تعبیر کرتا ہے، ما = ق لا رکھو، تب لا = $\frac{ما}{ق}$ تب مساوات مطلوبہ فا $\left(\frac{ما}{ق}\right)$ = ۰ ہے،

اس تبدیل کا خاص فائدہ یہ ہے کہ اِس کی مدد سے کسی مساوات کو اس کے کسری سروں سے پاک کیا جا سکتا ہے -

مثال - مساوات $۲ لا^{۳} - \frac{۳}{۲} لا^{۲} - \frac{۱}{۸} لا + \frac{۳}{۱۶} = ۰$ میں سے اِس کے کسری سر خارج کرو -

$لا = \frac{ما}{ق}$ رکھو اور ہر ایک رقم کو $ق^۲$ سے ضرب دو، تب

$$۲ ما^۳ - \frac{۳}{۲} ق ما^۲ - \frac{۱}{۸} ق^۲ ما + \frac{۳}{۱۶} ق^۳ = ۰$$

ق = ۴ رکھنے سے تمام سر صحیح عدد ہو جاتے ہیں اور ۲ پر تقسیم کرنے سے

$$ما^۳ - ۳ ما^۲ - ما + ۶ = ۰$$

۵۶۷- ایک مساوات کو ایک اور ایسی مساوات میں تبدیل کرو جسکی اصلیں مساوات مفروضہ کی اصلوں کے متکافیوں کے مساوی ہوں -

فرض کرو کہ فا(لا) = ۰ مساوات مفروضہ ہے، $ما = \frac{۱}{لا}$ رکھو-

یعنی $لا = \frac{۱}{ما}$، تب مساوات مطلوبہ $فا(\frac{۱}{ما}) = ۰$ ہوگی-

اِس تبدیل کے خاص فائدوں میں سے ایک فائدہ یہ ہے کہ اس سے اُن جملوں کی قیمتیں معلوم ہوسکتی ہیں جو اصلوں کی منفی قوتوں کے متشابہ تفاعلوں پر مشتمل ہوتے ہیں -

مثال ۱- اگر مساوات $لا^۳ - ف لا^۲ + ق لا - ر = ۰$ کی اصلیں ا، ب، ج ہوں تو

$\frac{۱}{ا^۲} + \frac{۱}{ب^۲} + \frac{۱}{ج^۲}$ کی قیمت معلوم کرو-

لا کی بجائے $\frac{۱}{ما}$ لکھو اور $ما^۳$ سے ضرب دو اور تمام علامتیں بدل دو، تب مساوات محصلہ $ر ما^۳ - ق ما^۲ + ف ما - ۱ = ۰$ کی اصلیں $\frac{۱}{ا}$، $\frac{۱}{ب}$، $\frac{۱}{ج}$ ہیں،

$$پس\ \Sigma \frac{۱}{ا} = \frac{ق}{ر}،\quad \Sigma \frac{۱}{اب} = \frac{ف}{ر}$$

$$\therefore \Sigma \frac{۱}{ا^۲} = \frac{ق^۲ - ۲ ف ر}{ر^۲}$$

مثال ۲- اگر مساوات $لا^{۳} + ۲ لا^{۲} - ۳ لا - ۱ = ۰$ کی اصلیں ا، ب، ج، ہوں تو $ا^{-۳} + ب^{-۳} + ج^{-۳}$ کی قیمتیں معلوم کرو۔

لا کی بجائے $\frac{۱}{ما}$ لکھنے سے تبدیل شدہ مساوات

$$ما^{۳} + ۳ ما^{۲} - ۲ ما - ۱ = ۰$$

ہو جاتی ہے اور جملہ مفروضہ اس مساوات میں $ج_{۳}$ کی قیمت ہے۔

یہاں $ج_{۱} = -۳$

$$ج_{۲} = (-۳)^{۲} - ۲ (-۲) = ۱۳$$

اور $$ج_{۳} + ۳ ج_{۲} - ۲ ج_{۱} - ۳ = ۰$$

لہذا $$ج_{۳} = -۴۲$$

۵۶۸- اگر ایک مساوات ایسی ہو کہ اس میں لا کی بجائے $\frac{۱}{لا}$ رکھنے سے مساوات میں کوئی تبدیلی واقع نہ ہو تو اس مساوات کو مساواتِ متکافی کہتے ہیں۔
اگر مساواتِ مفروضہ

$$لا^{ن} + ف_{۱} لا^{ن-۱} + ف_{۲} لا^{ن-۲} + \dots + ف_{ن-۲} لا^{۲} + ف_{ن-۱} لا + ف_{ن} = ۰$$

ہو تو اس میں لا کی بجائے $\frac{۱}{لا}$ رکھنے سے یہ مساوات حسبِ ذیل ہو جاتی ہے

$$ف_{ن} لا^{ن} + ف_{ن-۱} لا^{ن-۱} + ف_{ن-۲} لا^{ن-۲} + \dots\dots + ف_{۲} لا^{۲} + ف_{۱} لا + ۱ = ۰$$

اگر یہ دونوں مساواتیں ایک ہی ہوں تو ظاہر ہے کہ

$$ف_{۱} = \frac{ف_{ن-۱}}{ف_{ن}} ، ف_{۲} = \frac{ف_{ن-۲}}{ف_{ن}} ، \dots\dots ف_{ن-۲} = \frac{ف_{۲}}{ف_{ن}}$$

$$ف_{ن-۱} = \frac{ف_{۱}}{ف_{ن}} ، ف_{ن} = \frac{۱}{ف_{ن}}$$

سب سے آخری نتیجہ کی رُو سے $ف_ن = \pm ۱$، اِس طرح سے ہمیں دو قسم کی منکافی مساواتیں حاصل ہوتی ہیں۔

(۱) $ف_ن = ۱$ تو

$ف_۱ = ف_{ن-۱}$، $ف_۲ = ف_{ن-۲}$، $ف_۳ = ف_{ن-۳}$، ....

یعنی شروع اور آخر کی طرف سے متساوی الفصل رقموں کے سر مساوی ہوتے ہیں۔

(۲) اگر $ف_ن = -۱$ تو

$ف_۱ = - ف_{ن-۱}$، $ف_۲ = - ف_{ن-۲}$، $ف_۳ = - ف_{ن-۳}$، ......

پس اگر مساوات ۲م ابعاد کی ہو تو $ف_م = - ف_م$ یا $ف_م = ۰$

اِس صورت میں اول اور آخر سے متساوی الفصل رقمیں بلحاظ مقدار مساوی اور بلحاظ علامت مختلف ہوتی ہیں اور اگر مساوات جفت درجہ کی ہو تو وسطی رقم غائب ہوتی ہے۔

۵۶۹ - فرض کرو کہ $فا(لا) = ۰$ منکافی مساوات ہے۔

اگر $فا(لا) = ۰$ قسم اول کی ہو اور طاق درجہ کی ہو تو اِس کی ایک اصل -۱ ہوگی یعنی $فا(لا)$، $لا + ۱$ پر تقسیم ہو جائے گا۔ تقسیم کرنے سے اگر خارج قسمت $فہ(لا)$ ہو تو $فہ(لا) = ۰$ قسم اول اور درجہ جُفت کی منکافی مساوات ہے۔

اگر $فا(لا) = ۰$ قسم دوم کی مساوات ہو اور اس کا درجہ طاق ہو تو اِس کی ایک اصل $+۱$ ہوگی، اِس صورت میں $فا(لا)$، $لا - ۱$ پر پورا تقسیم ہو جائے گا۔ اور حسب سابق $فہ(لا)$ قسم اول اور درجہ جُفت کی ایک منکافی مساوات ہوگی۔

اگر $فا(لا) = ۰$ قسم دوم اور درجہ جُفت کی کوئی مساوات منکافی ہو تو اِس کی ایک اصل $+۱$ اور دوسری اصل -۱ ہوگی، اِس صورت میں $فا(لا)$، $لا^۲ - ۱$ پر تقسیم ہو جائے گا اور حسب سابق $فہ(لا) = ۰$ قسم اوّل اور درجہ جفت

کی ایک مساوات متکافی ہے۔

لہذا ہر ایک مساوات متکافی، جُفت درجہ کی ہوتی ہے اور اس کی آخری رقم مثبت ہوتی ہے اور یا یہ اِس شکل میں لائی جا سکتی ہے پس اِس شکل کو متکافی مساواتوں کی معیاری شکل سمجھنا چاہیئے۔

۵۷۰۔ معیاری شکل کی کوئی مساوات متکافی نصف ابعاد کی مساوات کی شکل میں تبدیل کی جا سکتی ہے۔

فرض کرو کہ مساوات

$$\text{ا}\,\text{لا}^{۲\text{م}} + \text{ب}\,\text{لا}^{۲\text{م}-۱} + \text{ج}\,\text{لا}^{۲\text{م}-۲} + \dots + \text{ک}\,\text{لا}^{\text{م}} + \dots + \text{ج}\,\text{لا}^{۲} + \text{ب}\,\text{لا} + \text{ا} = ۰$$

ہے، $\text{لا}^{\text{م}}$ پر تقسیم کرنے اور رقموں کو ترتیب دینے سے

$$\text{ا}\left(\text{لا}^{\text{م}} + \frac{۱}{\text{لا}^{\text{م}}}\right) + \text{ب}\left(\text{لا}^{\text{م}-۱} + \frac{۱}{\text{لا}^{\text{م}-۱}}\right) + \text{ج}\left(\text{لا}^{\text{م}-۲} + \frac{۱}{\text{لا}^{\text{م}-۲}}\right) + \dots + \text{ک} = ۰$$

اب

$$\text{لا}^{\text{ف}+۱} + \frac{۱}{\text{لا}^{\text{ف}+۱}} = \left(\text{لا}^{\text{ف}} + \frac{۱}{\text{لا}^{\text{ف}}}\right)\left(\text{لا} + \frac{۱}{\text{لا}}\right) - \left(\text{لا}^{\text{ف}-۱} + \frac{۱}{\text{لا}^{\text{ف}-۱}}\right)$$

پس $\text{لا} + \frac{۱}{\text{لا}}$ کی بجائے ی لکھنے اور ف کو بالتواتر ۱، ۲، ۳، .... قیمتیں دینے سے

$$\text{لا}^{۲} + \frac{۱}{\text{لا}^{۲}} = \text{ی}^{۲} - ۲$$

$$\text{لا}^{۳} + \frac{۱}{\text{لا}^{۳}} = \text{ی}(\text{ی}^{۲} - ۲) - \text{ی} = \text{ی}^{۳} - ۳\,\text{ی}$$

$$\text{لا}^{۴} + \frac{۱}{\text{لا}^{۴}} = \text{ی}(\text{ی}^{۳} - ۳\,\text{ی}) - (\text{ی}^{۲} - ۲) = \text{ی}^{۴} - ۴\,\text{ی}^{۲} + ۲$$

اور علیٰ ہذا القیاس، اور بالعموم $\text{لا}^{\text{م}} + \frac{۱}{\text{لا}^{\text{م}}}$، ی میں م ابعاد کا جملہ ہے۔

پس مساوات ی میں م ابعاد کی ہے۔

۵۷۱۔ ایک ایسی مساوات معلوم کرو جسکی اصلیں ایک مفروضہ مساوات کی اصلوں کے مربعوں کے مساوی ہوں۔

فرض کرو کہ $\text{فا}(\text{لا}) = 0$ مساوات مفروضہ ہے، $\text{ما} = \text{لا}^{2}$ یعنی $\text{لا} = \sqrt{\text{ما}}$ رکھو، پس مساوات مطلوبہ $\text{فا}(\sqrt{\text{ما}}) = 0$ حاصل ہوتی ہے

مثال - ایک مساوات معلوم کرو جسکی اصلیں مساوات

$$\text{لا}^{3} + \text{ف}_{1}\,\text{لا}^{2} + \text{ف}_{2}\,\text{لا} + \text{ف}_{3} = 0$$

کی اصلوں کے مربعوں کے برابر ہوں -

$\text{لا} = \sqrt{\text{ما}}$ رکھنے اور تبادلۂ رقوم کرنے سے

$$(\text{ما} + \text{ف}_{2})\sqrt{\text{ما}} = -(\text{ف}_{1}\,\text{ما} + \text{ف}_{3})$$

جس سے $(\text{ما}^{2} + 2\,\text{ف}_{2}\,\text{ما} + \text{ف}_{2}^{2})\,\text{ما} = \text{ف}_{1}^{2}\,\text{ما}^{2} + 2\,\text{ف}_{1}\text{ف}_{3}\,\text{ما} + \text{ف}_{3}^{2}$

یعنی $\text{ما}^{3} + (2\,\text{ف}_{2} - \text{ف}_{1}^{2})\,\text{ما}^{2} + (\text{ف}_{2}^{2} - 2\,\text{ف}_{1}\text{ف}_{3})\,\text{ما} - \text{ف}_{3}^{2} = 0$

مثال ۲ - دفعہ ۵۳۹ کے حل سے مقابلہ کرو -

۵۷۲ - ایک مساوات کو ایک اور ایسی مساوات میں تبدیل کرو جسکی اصلیں مفروضہ مساوات کی اصلوں سے بقدر ایک خاص مقدار کے بڑی ہوں -

فرض کرو کہ $\text{فا}(\text{لا}) = 0$ مساواتِ مفروضہ ہے اور ھ مقدار معلوم ہے، $\text{ما} = \text{لا} + \text{ھ}$ یعنی $\text{لا} = \text{ما} - \text{ھ}$ رکھنے سے مساواتِ مطلوبہ $\text{فا}(\text{ما} - \text{ھ}) = 0$ ہو جاتی ہے -

اِسی طرح سے $\text{فا}(\text{ما} + \text{ھ}) = 0$ ایک ایسی مساوات ہے جسکی اصلیں مساوات $\text{فا}(\text{لا}) = 0$ کی اصلوں سے بقدر ھ کے چھوٹی ہیں -

مثال - ایک مساوات بناؤ جسکی اصلیں مساوات

$$4\,\text{لا}^{4} + 32\,\text{لا}^{3} + 83\,\text{لا}^{2} + 76\,\text{لا} + 21 = 0$$

کی اصلوں سے بقدر ۲ کے بڑی ہوں -

مطلوبہ مساوات مساواتِ بالا میں لا کی بجائے $\text{لا} - 2$ درج کرنے سے حاصل ہوگی پس ھارنر کے قاعدہ میں ہم $\text{لا} + 2$ کو بطور مقسوم علیہ استعمال کرتے ہیں اور حسب ذیل

طریق سے حساب لگاتے ہیں

۴	۳۲	۸۳	۷۶	۲۱
۴	۲۴	۳۵	۶	۹
۴	۱۶	۳	۰	
۴	۸	۱۳-		
۴	۰			
۴				

پس تبدیل شدہ مساوات ۴ لا^{۴} - ۱۳ لا^{۲} + ۹ = ۰ یا (۴ لا^{۲} - ۹)(لا^{۲} - ۱) = ۰ ہے
اِس مساوات کی اصلیں + $\frac{۳}{۲}$ ، - $\frac{۳}{۲}$ ، + ۱ ، - ۱ ہیں ؛ پس مساوات
مفروضہ کی اصلیں - $\frac{۱}{۲}$ ، - $\frac{۷}{۲}$ ، - ۱ ، - ۳ ہیں۔

۵۷۳ - دفعۂ ماقبل کی تبدیلی کا خاص فائدہ یہ ہے کہ اِس کی مدد سے ایک مساوات کی کوئی خاص رقم معدوم کی جا سکتی ہے۔

فرض کرو کہ مساواتِ مفروضہ

فب لا^{ن} + ف$_{۱}$ لا$^{ن-۱}$ + ف$_{۲}$ لا$^{ن-۲}$ + ... + ف$_{ن-۱}$ لا + ف$_{ن}$ = ۰ ہے

تب اگر ما = لا - ھ ، ہیں نئی مساوات

فب (ما + ھ)^{ن} + ف$_{۱}$ (ما + ھ)$^{ن-۱}$ + ف$_{۲}$ (ما + ھ)$^{ن-۲}$ + ... + ف$_{ن}$ = ۰

حاصل ہوئی ہے اگر اس کی رقوم کو ما کی نزولی قوتوں کے لحاظ سے ترتیب دیا جائے تو یہ مساوات ہو جاتی ہے:

فب ما^{ن} + (ن فب ھ + ف$_{۱}$) ما$^{ن-۱}$ + { $\frac{ن(ن-۱)}{|۲}$ فب ھ^{۲} + (ن-۱) ف$_{۱}$ ھ
+ ف$_{۲}$ } ما$^{ن-۲}$ + ... = ۰

اگر ہم دوسری رقم کو نکالنا چاہیں تو ن ف ہ + ف۱ = ۰ یعنی ہ = - ف۱/ن ف

اگر تیسری رقم کو معدوم کرنا مقصود ہو تو

$$\frac{ن(ن-۱)}{\lfloor ۲} ف ہ^۲ + (ن-۱) ف ہ + ف_۲ = ۰$$

جو ہ میں درجہ دوم کی ایک مساوات ہے، اِسی طرح سے ہم کسی اور رقم کو نکال سکتے ہیں۔

بعض اوقات حسب مشقِ ذیل عمل کرنا زیادہ مفید ہوتا ہے۔

مثال۔ مساوات ف لا^۳ + ق لا^۲ + ر لا + س = ۰ میں سے دوسری رقم نکال دو

فرض کرو کہ اِس مساوات کی اصلیں ع، ب، جہ ہیں

یعنی ع + ب + جہ = - ق/ف

تب اگر ہم ہر ایک اصل کو بقدر ق/۳ف کے بڑھا دیں تو تبدیل شدہ مساوات میں اصلوں کا حاصل جمع - ق/ف + ق/ف کے مساوی ہوگا یعنی دوسری رقم کا سر صفر ہوگا۔

پس مساواتِ مفروضہ میں لا کی بجائے لا - ق/۳ف رکھنے سے مطلوبہ تبدیلی حاصل ہوتی ہے۔

۴۷۵۔ مساوات فا (لا) = ۰ سے ہم ایک ایسی مساوات بنا سکتے ہیں جسکی اصلیں مساواتِ مفروضہ کی اصلوں کے ساتھ کسی خاص ربط کے ذریعہ مربوط ہوں۔ فرض کرو کہ مساوات مطلوبہ کی ایک اصل ما ہے، نیز فرض کرو کہ ربط فہ (لا، ما) = ربط مذکور کو تعبیر کرتا ہے۔ تب تبدیل شدہ مساوات یا اِس طرح حاصل ہوتی ہے کہ مساوات فہ (لا، ما) = ۰ کے ذریعہ لا کو ما کے

تفاعل کے طور پر بیان کیا جائے اور پھر لا کی اس قیمت کو جو ما کی رقوم میں حاصل کی گئی ہے مساوات فا (لا) = ۰ میں درج کیا جائے یا مطلوبہ مساوات اسطرح حاصل ہوگی کہ ہم لا کو مساواتوں فا (لا) = ۰ اور فہ (لا، ما) = ۰ سے ساقط کرکے ما کی رقوم میں رشتہ حاصل کریں۔

مثال ۱۔ اگر مساوات $\text{لا}^3 + \text{ف}\,\text{لا}^2 + \text{ق}\,\text{لا} + \text{ر} = 0$ کی اصلیں ا، ب، ج ہوں تو ایک مساوات بناؤ جسکی اصلیں

$$\text{ا} - \frac{1}{\text{ب ج}}،\quad \text{ب} - \frac{1}{\text{ج ا}}،\quad \text{ج} - \frac{1}{\text{ا ب}}$$

ہوں۔

جب مساوات مفروضہ میں لا = ا تو تبدیل شدہ مطلوبہ مساوات میں $\text{ما} = \text{ا} - \frac{1}{\text{ب ج}}$

$$\text{لیکن}\quad \text{ا} - \frac{1}{\text{ب ج}} = \text{ا} - \frac{\text{ا}}{\text{ا ب ج}} = \text{ا} + \frac{\text{ا}}{\text{ر}}$$

اس لئے تبدیل شدہ مساوات

$$\text{ما} = \text{لا} + \frac{\text{لا}}{\text{ر}} \quad \text{یعنی}\quad \text{لا} = \frac{\text{ر}\,\text{ما}}{1 + \text{ر}}$$

کے مساوی رکھنے سے حاصل ہوتی ہے۔

پس مطلوبہ مساوات

$$\text{ر}\,\text{ما}^3 + \text{ف}\,\text{ر}(1+\text{ر})\,\text{ما}^2 + \text{ق}(1+\text{ر})^2\,\text{ما} + (1+\text{ر})^3 = 0 \quad \text{ہے}$$

مثال ۲۔ ایک مساوات بناؤ جسکی اصلیں مساوات درجہ سوم

$$\text{لا}^3 + \text{ق}\,\text{لا} + \text{ر} = 0$$

کی اصلوں کے فرقوں کے مربعوں کے مساوی ہوں۔

فرض کرو کہ مساوات درجہ سوم کی اصلیں ا، ب، ج ہیں، تب مطلوبہ مساوات کی اصلیں $(\text{ب} - \text{ج})^2$، $(\text{ج} - \text{ا})^2$، $(\text{ا} - \text{ب})^2$

ہونگی۔

اب $(ب - ج)^{2} = ب^{2} + ج^{2} - 2ب ج = ا^{2} + ب^{2} + ج^{2} - ا^{2} - \frac{2 ا ب ج}{ا}$

$$= (ا + ب + ج)^{2} - 2(ب ج + ج ا + ا ب) - ا^{2} - \frac{2 ا ب ج}{ا}$$

$$= -2ق - ا^{2} + \frac{2ر}{ا}$$

پھر جب مساوات مفروضہ میں لا = ا تو تبدیل شدہ مساوات میں $ما = (ب - ج)^{2}$

$$\therefore ما = -2ق - لا^{2} + \frac{2ر}{لا}$$

لہذا ہمیں مساواتوں

$$لا^{3} + ق لا + ر = 0$$

اور

$$لا^{3} + (2ق + ما) لا - 2ر = 0$$

سے لا کو ساقط کرنا چاہیئے۔

تفریق کرنے سے $(ق + ما) لا = 3ر$ یا $لا = \frac{3ر}{ق + ما}$

یہ قیمت درج کرکے اختصار کرنے سے

$$ما^{3} + 6ق ما^{2} + 9ق^{2} ما + 27ر^{2} + 4ق^{3} = 0$$

نتیجہ صریح۔ اگر ا، ب، ج سب حقیقی ہوں تو $(ب - ج)^{2}$، $(ج - ا)^{2}$، $(ا - ب)^{2}$ سب مثبت ہونگے، اس لئے $27ر^{2} + 4ق^{3}$ منفی ہوگا۔

پس اگر مساوات $لا^{3} + ق لا + ر = 0$ کی تمام اصلیں حقیقی ہوں تو $27ر^{2} + 4ق^{3}$ منفی ہوگا یعنی $(\frac{ر}{2})^{2} + (\frac{ق}{3})^{3}$ منفی ہوگا۔

اگر $27ر^{2} + 4ق^{3} = 0$ تو تبدیل شدہ مساوات کی ایک اصل صفر ہوگی اس لئے

ابتدائی مساوات کی دو اصلیں مساوی ہونگی۔

اگر $۲۷ ر^{۲} + ۴ ق^{۳}$ مثبت ہو تو تبدیل شدہ مساوات کی ایک اصل منفی ہوگی (دیکھو دفعہ ۵۵۳) اس لئے ابتدائی مساوات کی دو اصلیں خیالی ہونگی کیونکہ خیالی اصلوں کا زوج ہی تبدیل شدہ مساوات کی ایک اصل کو منفی کرسکتا ہے۔

امثلہ نمبری ۳۵ (د)

(۱) مساوات $\text{لا}^{۳} - ۴ \text{لا}^{۲} + \frac{۱}{۴} \text{لا} - \frac{۱}{۹} = ۰$ کو ایک ایسی مساوات میں تبدیل کرو جسکے سر صحیح عدد ہوں اور پہلی رقم کا سر ایک ہو۔

(۲) مساوات $۳ \text{لا}^{۴} - ۵ \text{لا}^{۳} + \text{لا}^{۲} - \text{لا} + ۱ = ۰$ کو ایک اور مساوات میں تبدیل کرو جسکی پہلی رقم کا سر ایک ہو۔

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

(۳) $۲ \text{لا}^{۴} + \text{لا}^{۳} - ۶ \text{لا}^{۲} + \text{لا} + ۲ = ۰$

(۴) $\text{لا}^{۴} - ۱۰ \text{لا}^{۳} + ۲۶ \text{لا}^{۲} - ۱۰ \text{لا} + ۱ = ۰$

(۵) $\text{لا}^{۵} - ۵ \text{لا}^{۴} + ۹ \text{لا}^{۳} - ۹ \text{لا}^{۲} + ۵ \text{لا} - ۱ = ۰$

(۶) $۴ \text{لا}^{۶} - ۲۴ \text{لا}^{۵} + ۵۷ \text{لا}^{۴} - ۷۳ \text{لا}^{۳} + ۵۷ \text{لا}^{۲} - ۲۴ \text{لا} + ۴ = ۰$

(۷) اگر مساوات $۳ \text{لا}^{۳} - ۲۲ \text{لا}^{۲} + ۴۸ \text{لا} - ۳۲ = ۰$ کی اصلیں سلسلۂ موسیقیہ میں ہوں تو اس کو حل کرو۔

(۸) مساوات $\text{لا}^{۳} - ۱۱ \text{لا}^{۲} + ۳۶ \text{لا} - ۳۶ = ۰$ کی اصلیں سلسلۂ موسیقیہ میں ہیں ان اصلوں کو دریافت کرو۔

(۹) اگر مساوات $\text{لا}^{۳} - \text{ا} \text{لا}^{۲} + \text{لا} - \text{ب} = ۰$ کی اصلیں سلسلۂ موسیقیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ وسطی اصل ۳ب کے مساوی ہے۔

(۱۰) مساوات $۴۰ \text{لا}^{۴} - ۲۲ \text{لا}^{۳} - ۲۱ \text{لا}^{۲} + ۲ \text{لا} + ۱ = ۰$ کو حل کرو جبکہ اس کی اصلیں سلسلۂ موسیقیہ میں ہوں۔

ذیل کی مساواتوں میں سے دوسری رقم خارج کرو۔

(۱۱) $\text{لا}^{۳} - ۶\,\text{لا}^{۲} + ۱۰\,\text{لا} - ۳ = ۰$

(۱۲) $\text{لا}^{۴} + ۴\,\text{لا}^{۳} + ۲\,\text{لا}^{۲} - ۴\,\text{لا} - ۲ = ۰$

(۱۳) $\text{لا}^{۵} + ۵\,\text{لا}^{۴} + ۳\,\text{لا}^{۳} + \text{لا}^{۲} + \text{لا} - ۱ = ۰$

(۱۴) $\text{لا}^{۶} - ۱۲\,\text{لا}^{۵} + ۳\,\text{لا}^{۲} - ۱۷\,\text{لا} + ۳۰۰ = ۰$

(۱۵) مساوات $\text{لا}^{۳} - \frac{\text{لا}}{۴} - \frac{۳}{۴} = ۰$ کو ایک ایسی مساوات میں تبدیل کرو جسکی اصلیں مساوات مفروضہ کی اصلوں سے بقدر $\frac{۳}{۲}$ کے بڑی ہوں۔

(۱۶) مساوات $\text{لا}^{۵} - ۴\,\text{لا}^{۴} + ۳\,\text{لا}^{۲} - ۴\,\text{لا} + ۶ = ۰$ کی اصلوں کو بقدر ۳ کے کم کرو۔

(۱۷) ایک مساوات بناؤ جسکی ہر ایک اصل مساوات $\text{لا}^{۴} - ۵\,\text{لا}^{۳} + ۶\,\text{لا} - ۳ = ۰$ کی ایک اصل سے بقدر ۱ کے بڑی ہو۔

(۱۸) ایک مساوات بناؤ جسکی اصلیں مساوات

$$\text{لا}^{۴} + \text{لا}^{۳} + ۲\,\text{لا}^{۲} + \text{لا} + ۱ = ۰$$

کی اصلوں کے مربعوں کے مساوی ہوں۔

(۱۹) ایک مساوات بناؤ جسکی اصلیں مساوات $\text{لا}^{۳} + ۳\,\text{لا}^{۲} + ۲ = ۰$ کی اصلوں کے مکعبوں کے مساوی ہوں۔

اگر ا، ب، ج مساوات $\text{لا}^{۳} + \text{ق}\,\text{لا} + \text{ر} = ۰$ کی اصلیں ہوں تو وہ مساوات بناؤ جسکی اصلیں یہ ہوں:۔

(۲۰) $\text{ک}\,\text{ا}^{-۱}$، $\text{ک}\,\text{ب}^{-۱}$، $\text{ک}\,\text{ج}^{-۱}$ (۲۱) $\text{ب}^{۲}\text{ج}^{۲}$، $\text{ج}^{۲}\text{ا}^{۲}$، $\text{ا}^{۲}\text{ب}^{۲}$

(۲۲) $\frac{\text{ب} + \text{ج}}{\text{ا}^{۲}}$، $\frac{\text{ج} + \text{ا}}{\text{ب}^{۲}}$، $\frac{\text{ا} + \text{ب}}{\text{ج}^{۲}}$

(۲۳) $(ب ج + \frac{۱}{ا})$، $(ج ا + \frac{۱}{ب})$، $(ا ب + \frac{۱}{ج})$

(۲۴) $ا(ب + ج)$، $ب(ج + ا)$، $ج(ا + ب)$ (۲۵) $ا^{۳}$، $ب^{۳}$، $ج^{۳}$

(۲۶) $(\frac{ب}{ج} + \frac{ج}{ب})$، $(\frac{ج}{ا} + \frac{ا}{ب})$، $(\frac{ا}{ب} + \frac{ب}{ا})$

(۲۷) ثابت کرو کہ مساوات $لا^{۳} + ا^{۳} لا^{۲} + ب^{۳} لا + ا^{۳} ب^{۳} = ۰$ کی اصلیں مساوات $لا^{۳} + ا لا^{۲} + ب لا + ا ب = ۰$ کی اصلوں کے مکعبوں کے مساوی ہیں۔

(۲۸) مساوات $لا^{۵} - ۵ لا^{۴} - ۵ لا^{۳} + ۲۵ لا^{۲} + ۴ لا - ۲۰ = ۰$ کی اصلیں

ا، - ا، ب، - ب، ج کی شکل کی ہیں، مساوات کو حل کرو۔

(۲۹) اگر $لا^{۳} + ۳ ف لا^{۲} + ۳ ق لا + ر = ۰$ کی اصلیں سلسلۂ موسیقیہ میں ہوں تو

ثابت کرو کہ $۲ ق^{۳} = ر (۳ ف ق - ر)$۔

کعبی مساواتیں

۵۷۵۔ کعبی مساوات یا مساوات درجہ سوم کی عام سے عام شکل

$$لا^{۳} + ف لا^{۲} + ق لا + ر = ۰$$

ہے، لیکن جیسا کہ دفعہ ۵۷۳ میں مذکور ہو چکا ہے اس مساوات کو نسبتاً سادہ شکل $لا^{۳} + ق لا + ر = ۰$ میں مختصر کیا جا سکتا ہے۔ پس ہم مساوات درجہ سوم کی معیاری شکل کے لئے یہی مساوات لیں گے۔

۵۷۶۔ مساوات $لا^{۳} + ق لا + ر = ۰$ کو حل کرو

فرض کرو کہ $لا = م + ی$، تب

$$لا^{۳} = م^{۳} + ی^{۳} + ۳ م ی (م + ی) = م^{۳} + ی^{۳} + ۳ م ی لا$$

اور مساواتِ مفروضہ ہو جاتی ہے

$$\text{ما}^{۳} + \text{ی}^{۳} + (۳\,\text{ما ی} + \text{ق})\,\text{لا} + \text{ر} = ۰$$

اب تک ما اور ی کوئی دو مقادیر ہیں جن پر صرف یہ شرط عائد کی گئی ہے کہ اُن کا حاصل جمع مساواتِ مفروضہ کی اصلوں میں سے ایک کے مساوی ہے اگر مزید برآں ہم یہ فرض کریں کہ یہ مساوات $۳\,\text{ما ی} + \text{ق} = ۰$ کو پورا کرتی ہیں تو ان کی قیمت مکمل طور پر معلوم ہو سکتی ہے، اِس طرح سے ہمیں حاصل ہوتا ہے:۔

$$\text{ما}^{۳} + \text{ی}^{۳} = -\text{ر}\ ،\ \text{ما}^{۳}\,\text{ی}^{۳} = -\frac{\text{ق}^{۳}}{۲۷}$$

اِسلئے $\text{ما}^{۳}$ اور $\text{ی}^{۳}$، مساوات درجہ دوم

$$\text{ت}^{۲} + \text{ر ت} - \frac{\text{ق}^{۳}}{۲۷} = ۰$$

کی اصلیں ہیں۔ اِس مساوات کو حل کرنے اور

$$\text{ما}^{۳} = -\frac{\text{ر}}{۲} + \sqrt{\frac{\text{ر}^{۲}}{۴} + \frac{\text{ق}^{۳}}{۲۷}} \quad \ldots\ldots (۱)$$

$$\text{ی}^{۳} = -\frac{\text{ر}}{۲} - \sqrt{\frac{\text{ر}^{۲}}{۴} + \frac{\text{ق}^{۳}}{۲۷}} \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

رکھنے سے ہمیں لا کی قیمت ربط $\text{لا} = \text{ما} + \text{ی}$ سے حاصل ہوتی ہے،

$$\text{پس لا} = \left\{-\frac{\text{ر}}{۲} + \sqrt{\frac{\text{ر}^{۲}}{۴} + \frac{\text{ق}^{۳}}{۲۷}}\right\}^{\frac{۱}{۳}} + \left\{-\frac{\text{ر}}{۲} - \sqrt{\frac{\text{ر}^{۲}}{۴} + \frac{\text{ق}^{۳}}{۲۷}}\right\}^{\frac{۱}{۳}}$$

اُوپر کا حل عام طور پر کارڈن کا حل کہلاتا ہے کیونکہ اُس نے اول مرتبہ اِس حل کو ۱۵۴۵ء میں آرس میگنا[۱] میں شایع کیا تھا۔ کارڈن نے یہ حل ٹارٹگلیا[۲] سے حاصل کیا تھا لیکن قرائن سے معلوم ہوتا ہے کہ مساوات درجہ سوم کا حل پہلے پہل سی پیو فیرئیو[۳] نے تقریباً ۱۵۰۵ء میں

[۲] Tartaglia — [۱] Ars Magna — [۳] (Scipio Ferreo)

دریافت کیا گیا تھا۔ اِس مضمون پر نہایت دلچسپ اور تاریخی بحث برن سائیڈ اور پین ٹن کی کتاب نظریۂ معادلات کے آخر میں درج ہے۔

۵۷۔ دفعۂ ماقبل کی مساواتوں (۱) اور (۲) میں بائیں جانب جو مقادیر ہیں اُن میں سے ہر ایک مقدار کے حسب دفعہ ۱۱۰ تین جذر الکعب ہیں، پس بظاہر ایسا معلوم ہوتا ہے کہ لا کی ۹ قیمتیں ہیں مگر درحقیقت ایسا نہیں ہے چونکہ ما ی = $-\frac{\text{ق}}{۳}$ اِسلئے جذرالکعبوں کے وہ زوج لینے چاہئیں جن میں سے ہر ایک کا حاصل ضرب ناطق ہو۔ لہٰذا اگر جذرالکعبوں کے کسی ایک زوج کی قیمتوں کو جو اس شرط کو پورا کرے ما، ی سے تعبیر کیا جائے تو اس شرط کو پورا کرنے والے باقی جوڑے سہ ما، $\text{سہ}^{۲}$ ی اور $\text{سہ}^{۲}$ ما، سہ ی ہونگے جہاں سہ اور $\text{سہ}^{۲}$ ایک کے جذر الکعب ہیں، اسلئے مساوات کی اصلیں ما + ی، سہ ما + $\text{سہ}^{۲}$ ی، $\text{سہ}^{۲}$ ما + سہ ی ہیں۔

مثال۔ مساوات $\text{لا}^{۳} - ۱۵\,\text{لا} = ۱۲۶$

ما + ی = لا رکھو، تب

$$\text{ما}^{۳} + \text{ی}^{۳} + (۳\,\text{ما ی} - ۱۵)\,\text{لا} = ۱۲۶$$

$۳\,\text{ما ی} - ۱۵ = ۰$ رکھو

تب $\text{ما}^{۳} + \text{ی}^{۳} = ۱۲۶$، نیز $\text{ما}^{۳}\,\text{ی}^{۳} = ۱۲۵$

اسلئے $\text{ما}^{۳}$، $\text{ی}^{۳}$ مساواتِ ذیل کی اصلیں ہیں۔

$$\text{ت}^{۲} - ۱۲۶\,\text{ت} + ۱۲۵ = ۰$$

$$\therefore \text{ما}^{۳} = ۱۲۵ \quad ، \quad \text{ی}^{۳} = ۱$$

$$\therefore \text{ما} = ۵ \quad ، \quad \text{ی} = ۱$$

پس $\text{ما} + \text{ی} = ۵ + ۱ = ۶$

$$\text{سہ ما} + \text{سہ}^{۲}\,\text{ی} = \frac{-۱ + \sqrt{-۳}}{۲} \times ۵ + \frac{-۱ - \sqrt{-۳}}{۲}$$

$$= -۳ + ۲\sqrt{-۳}$$

$$س^2 ما + س ی = -۳ - ۲\sqrt{-۳}$$

اور اصلیں ۶، $-۳ + ۲\sqrt{-۳}$ ، $-۳ - ۲\sqrt{-۳}$ ہیں۔

۵۷۸۔ اب ہم اس امر کی تشریح کردینا چاہتے ہیں کہ دفعہ ۵۷۶ میں لا کی ۹ قیمتیں کیوں حاصل ہوتی ہیں۔ ہم دیکھتے ہیں کہ ما اور ی مساواتوں

$ما^3 + ی^3 + ر = ۰$ ، $ما ی = -\frac{ق}{۳}$ سے حاصل ہوتے ہیں، لیکن دوران حل میں دوسری مساوات کو بدل کر $ما^3 ی^3 = -\frac{ق^3}{۲۷}$ بنادیا جاتا ہے اور ظاہر ہے کہ موخرالذکر مساوات میں کوئی تبدیلی واقع نہ ہوگی اگر $ما ی = -\frac{س ق}{۳}$ یا $-\frac{س^2 ق}{۳}$ ، پس لا کی باقی چھ قیمتیں معادلات درجہ سوم

$$لا^3 + س ق لا + ر = ۰$$

اور

$$لا^3 + س^2 ق لا + ر = ۰$$

کے حل ہیں۔

۵۷۹۔ اب ہم مساوات $لا^3 + ق لا + ر = ۰$ کی اصلوں پر زیادہ تفصیل کے ساتھ بحث کرتے ہیں۔

(۱) اگر $\frac{ر^2}{۴} + \frac{ق^3}{۲۷}$ مثبت ہو تو $ما^3$ اور $ی^3$ دونوں حقیقی ہیں، فرض کرو کہ ما اور ی بالترتیب $ما^3$ اور $ی^3$ کے حسابی جذرالکعبوں کو تعبیر کرتے ہیں، تب مساوات مذکور کی اصلیں

$$ما + ی ،\quad س ما + س^2 ی ،\quad س^2 ما + س ی$$

ہیں۔ ان اصلوں میں سے پہلی اصل حقیقی ہے اور س اور $س^2$ کی قیمتیں درج کرنے سے باقی اصلیں

$-\frac{ما + ی}{۲} + \frac{ما - ی}{۲}\sqrt{-۳}$ ، $-\frac{ما + ی}{۲} - \frac{ما - ی}{۲}\sqrt{-۳}$ حاصل ہوتی ہیں۔

(۲) اگر $\frac{ر^2}{۴} + \frac{ق^3}{۲۷}$ صفر ہو تو $ما^3 = ی^3$ ؛ اِس صورت میں ما = ی اور اصلیں ۲ ما، ما (سہ + سہ^۲)، ما (سہ + سہ^۲) ہو جاتی ہیں یعنی ۲ ما، - ما، - ما ہیں۔

(۳) اگر $\frac{ر^2}{۴} + \frac{ق^3}{۲۷}$ منفی ہوں تو $ما^3$ اور $ی^3$، ا + خ ب اور ا - خ ب کی شکل کے دو خیالی جملے ہیں، فرض کرو کہ ان مقادیر کے جذر الکعب م + خ ن اور م - خ ن ہیں، تب مساوات زیرِ بحث کی اصلیں یہ ہو جاتی ہیں۔

م + خ ن + م - خ ن　　　یا ۲ م

(م + خ ن) سہ + (م - خ ن) سہ^۲　　　یا - م - ن $\sqrt{۳}$

(م + خ ن) سہ^۲ + (م - خ ن) سہ　　　یا - م + ن $\sqrt{۳}$

اور یہ سب حقیقی مقداریں ہیں۔ لیکن چونکہ خیالی مقادیر کے جذر الکعب نکالنے کا کوئی عام جبریہ یا حسابی قاعدہ نہیں ہے (دیکھو دفعہ ۸۹) اسلئے دفعہ ۵۷۶ کا حل اس صورت میں جبکہ مساوات کی اصلیں حقیقی اور غیر مساوی ہوں کسی عملی فائدہ پر مشتمل نہیں ہوتا۔

اِس حل کو بعض اوقات کارڈن کے حل کی ناقابل تحویل صورت کہتے ہیں۔

۵۸۰ - اِس ناقابل تحویل صورت میں جبکا ابھی ذکر ہوا مساوات کے حل کی تکمیل بذریعہ علمِ مثلث حسبِ ذیل ہوسکتی ہے۔ فرض کرو کہ حل

$$لا = (ا + خ ب)^{\frac{1}{3}} + (ا - خ ب)^{\frac{1}{3}}$$

ہے، ا = رجم طہ، ب = رجب طہ رکھو یعنی $ر^2 = ا^2 + ب^2$ اور مس طہ = $\frac{ب}{ا}$

تب $(ا + خ ب)^{\frac{1}{3}} = \left\{ ر (جم طہ + خ جب طہ) \right\}^{\frac{1}{3}}$

اب ڈی مائیرے[ط] کے مسئلہ کی رُو سے اِس جملہ کی تین قیمتیں یہ ہیں:-

ط (De Moivre)

$$ر^{\frac{1}{3}}\left(جم \frac{ط}{3} + خ\ جب \frac{ط}{3}\right)، \quad ر^{\frac{1}{3}}\left(جم \frac{ط + ۲\pi}{3} + خ\ جب \frac{ط + ۲\pi}{3}\right)$$

اور

$$ر^{\frac{1}{3}}\left(جم \frac{ط + ۴\pi}{3} + خ\ جب \frac{ط + ۴\pi}{3}\right)$$

جہاں $ر^{\frac{1}{3}}$ ، ر کے حسابی جذر الکعب کو تعبیر کرتا ہے اور ط وہ چھوٹے سے چھوٹا زاویہ ہے جو مساوات مس ط = $\frac{ب}{ا}$ سے حاصل ہوتا ہے۔
$(ا - خ ب)^{\frac{1}{3}}$ کی تین قیمتیں نتائج بالا میں خ کی علامت کو بدلنے سے حاصل ہوتی ہیں، پس مطلوبہ اصلیں یہ ہیں:-

$$۲ ر^{\frac{1}{3}} جم \frac{ط}{3} ، \quad ۲ ر^{\frac{1}{3}} جم \frac{ط + ۲\pi}{3} ، \quad ۲ ر^{\frac{1}{3}} جم \frac{ط + ۴\pi}{3}$$

مساوات درجہ چہارم

۵۸۱ - اب ہم مجمل طور پر بعض ایسے طریقوں پر بحث کرتے ہیں جو مساوات درجہ چہارم کا عام حل حاصل کرنے کے لئے استعمال کئے جاتے ہیں۔ ہم دیکھیں گے کہ اِن طریقوں میں سے ہر ایک میں پہلے ہمیں ایک معاون مساوات درجہ سوم کو حل کرنا پڑتا ہے، پس ظاہر ہے کہ مساوات درجہ سوم کی مانند مساوات درجہ چہارم کا عام حل بھی کسی مفروضہ عددی مساوات کا حل فوراً لکھ لینے کے لئے موزوں نہیں۔

۵۸۲ - مساوات درجہ چہارم کا حل پہلے پہل کارڈن کے ایک شاگرد فیرآری[1] نے بطریق ذیل حاصل کیا تھا:-

مساوات درجہ چہارم کو $لا^{4} + ۲ ف لا^{3} + ق لا^{2} + ۲ ر لا + س = 0$ سے تعبیر کرو۔

مساوات کے دونوں جانب $(ا لا + ب)^{2}$ جمع کرو جہاں مقادیر ا اور ب کو اِس طرح منتخب کیا گیا ہے کہ مساوات بالا کی دائیں جانب کا رُکن پورا

[1] Ferrari

مربع بن جاتا ہے۔ تب

لا^{4} + ۲ ف لا^{3} + (ق + ا^{2}) لا^{2} + ۲ (ر + ا ب) لا + س + ب^{2} = (ا لا + ب)^{2}

فرض کرو کہ مساوات کی دائیں جانب کا رُکن (لا^{2} + ف لا + ک)^{2} کے مساوی ہے، تب سروں کا مقابلہ کرنے سے

ف^{2} + ۲ ک = ق + ا^{2}، ف ک = ر + ا ب

ک^{2} = س + ب^{2}

ان مساواتوں میں سے ا اور ب کو ساقط کرنے سے

(ف ک − ر)^{2} = (۲ ک + ف^{2} − ق) (ک^{2} − س)

یا ۲ ک^{3} − ق ک^{2} + ۲ (ف ر − س) ک − ف^{2} س + ق س − ر^{2} = ۰

اس مساوات درجہ سوم سے ک کی ایک حقیقی قیمت ضرور نکل سکتی ہے [دیکھو دفعہ ۵۳ھ]، اس طرح سے ا اور ب معلوم ہو جاتے ہیں۔ نیز

(لا^{2} + ف لا + ک)^{2} = (ا لا + ب)^{2}

∴ لا^{2} + ف لا + ک = ± (ا لا + ب)

اور لا کی قیمتیں درجہ دوم کی دو مساواتوں

لا^{2} + (ف − ا) لا + (ک − ب) = ۰

لا^{2} + (ف + ا) لا + (ک + ب) = ۰

مثال۔ مساوات لا^{4} − ۲ لا^{3} − ۵ لا^{2} + ۱۰ لا − ۳ = ۰ کو حل کرو۔

مساوات کے دونوں طرف ا^{2} لا^{2} + ۲ ا ب لا + ب^{2} جمع کرو اور فرض کرو کہ

$$لا^۴ - ۲لا^۳ + (ا^۲ - ۵)لا^۲ + ۲(اب + ۵)لا + ب^۲ - ۳ = (لا^۲ - لا + ک)^۲$$

تب سروں کو مساوی کرنے سے

$$ا^۲ = ۲ک + ۶ ،\quad اب = -ک - ۵ ،\quad ب^۲ = ک^۲ + ۳$$

$$\therefore\quad (۲ک + ۶)(ک^۲ + ۳) = (ک + ۵)^۲$$

$$\therefore\quad ۲ک^۳ + ۵ک^۲ - ۴ک - ۷ = ۰$$

آزمائش سے معلوم ہوتا ہے کہ $ک = -۱$، اس لئے $ا^۲ = ۴$، $ب^۲ = ۴$، $اب = -۴$

لیکن مفروضہ کی رو سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$(لا^۲ - لا + ک)^۲ = (الا + ب)^۲$$

ک، ا اور ب کی قیمتیں درج کرنے سے ہمیں دو مساواتیں

$$لا^۲ - لا - ۱ = \pm(۲لا - ۲)$$

حاصل ہوتی ہیں، یعنی $لا^۲ - ۳لا + ۱ = ۰$ اور $لا^۲ + لا - ۳ = ۰$

جن کی اصلیں $\frac{۳ \pm \sqrt{۵}}{۲}$ ، $\frac{-۱ \pm \sqrt{۱۳}}{۲}$ ہیں

۵۸۳۔ ذیل کا حل ڈی کارٹیز نے ۱۶۳۷ء میں شائع کیا تھا۔
فرض کرو کہ مساوات درجہ چہارم کا اختصار کرکے اِس کو ذیل کی شکل

$$لا^۴ + ق لا^۲ + ر لا + س = ۰$$

میں لایا گیا ہے۔ اب فرض کرو کہ

$$لا^۴ + ق لا^۲ + ر لا + س = (لا^۲ + ک لا + ل)(لا^۲ - ک لا + م)$$

تب سروں کو مساوی کرنے سے

ل + م - ک^{2} = ق ، ک (م - ل) = ر ، ل م = س

ان مساواتوں میں سے پہلی دو سے حاصل ہوتا ہے

۲م = ک^{2} + ق + ر/ک ، ۲ل = ک^{2} + ق - ر/ک

پس تیسری مساوات میں درج کرنے سے

(ک^{3} + ق ک + ر)(ک^{3} + ق ک - ر) = ۴ س ک^{2}

یا ک^{6} + ۲ ق ک^{4} + (ق^{2} - ۴ س) ک^{2} - ر^{2} = ۰

یہ مساوات ک^{2} میں درجہ سوم کی مساوات ہے جسکی ایک اصل حقیقی اور مثبت ہے (دیکھو دفعہ ۳۵۵)، پس جب ک^{2} کی قیمت معلوم ہو تو اس سے ل اور م کی قیمتیں نکل سکتی ہیں اور مساوات درجہ چہارم کا حل درجہ دوم کی دو مساواتوں

لا^{2} + ک لا + ل = ۰

لا^{2} - ک لا + م = ۰

کو حل کرنے سے حاصل ہو سکتا ہے۔

مثال۔ مساوات لا^{4} - ۲ لا^{2} + ۸ لا - ۳ = ۰ کو حل کرو

فرض کرو کہ لا^{4} - ۲ لا^{2} + ۸ لا - ۳ = (لا^{2} + ک لا + ل)(لا^{2} - ک لا + م)

تب سروں کو مساوی کرنے سے

ل + م - ک^{2} = -۲ ، ک (م - ل) = ۸ ، ل م = -۳

ان سے حاصل ہوتا ہے (ک^{3} - ۲ک + ۸)(ک^{3} - ۲ک - ۸) = -۱۲ک^{2}

یا ک^{6} - ۴ک^{4} + ۱۶ک^{2} - ۶۴ = ۰

یہ مساوات صریحاً پوری ہوتی ہے - جبکہ ک^2 - ۴ = ۰ یعنی ک = ± ۲ ، ک کی صرف ایک قیمت پر غور کرنا کافی ہوگا ، ک = ۲ رکھنے سے

م + ل = ۲+ ، م - ل = ۴ یعنی ل = -۱ ، م = ۳

پس لا^4 - ۲ لا^3 + ۸ لا - ۳ = (لا^2 + ۲ لا - ۱) (لا^2 - ۲ لا + ۳)

اس لئے لا^2 + ۲ لا - ۱ = ۰ اور لا^2 - ۲ لا + ۳ = ۰

پس اصلیں -۱ ± √۲ اور ۱ ± √-۲ ہیں

۵۸۴ - چوتھے درجہ سے اعلےٰ درجہ کی مساواتوں کا عام جبریہ حل اب تک دریافت نہیں ہوا اور **ایبل** کا یہ دعویٰ کہ ایسا حل معلوم کرنا ناممکن ہے ماہرانِ ریاضی کے نزدیک عام طور پر مقبول ہے ، لیکن اگر کسی مساوات کے سر عددی ہوں تو تقریبی قیمت معلوم کرنے کے لئے **ہارنر** کا طریقہ استعمال کیا جاسکتا ہے - اِس کی رُو سے کسی حقیقی اصل کی تقریبی قیمت معلوم ہوسکتی ہے ، اِس مضمون پر مفصل بحث مساواتوں کے نظریہ کی کتابوں میں ملسکتی ہے

۵۸۵ - اب ہم چند متفرق مساواتوں پر بحث کر کے اِس باب کو ختم کرنا چاہتے ہیں -

مثال ۱ - مساواتوں لا + ما + ی + ء = ۰

ا لا + ب ما + ج ی + د ء = ۰

ا^2 لا + ب^2 ما + ج^2 ی + د^2 ء = ۰

ا^3 لا + ب^3 ما + ج^3 ی + د^3 ء = ک

کو حل کرو -

نیچے سے شروع ہوکر ان مساواتوں کو بالترتیب ۱ ، ف ، ق ، ر سے ضرب دو جہاں ف ، ق ، ر ایسی مقادیر ہیں جو تا حال نامعلوم ہیں - فرض کرو کہ یہ مقادیر ایسی ہیں کہ مساواتوں کے حاصل جمع میں ما ، ی ، ء کے سر معدوم ہوجاتے ہیں ، تب

$$لا\,(ا^{3} + ف\,ا^{2} + ق\,ا + ر) = ک$$

اور ب ، ج ، د مساوات

$$ت^{3} + ف\,ت^{2} + ق\,ت + ر = ۰$$

کی اصلیں ہیں۔

لہذا $ا^{3} + ف\,ا^{2} + ق\,ا + ر = (ا - ب)(ا - ج)(ا - د)$

پس $(ا - ب)(ا - ج)(ا - د)\,لا = ک$

اِس سے لا کی قیمت معلوم ہوتی ہے اور تشاکل سے ما ، ی اور ء کی قیمتیں بھی لکھی جاسکتی ہیں۔

نتیجہ صریح ۔ اگر مساواتیں یہ ہوں:۔

$$لا + ما + ی + ء = ۱$$

$$ا\,لا + ب\,ما + ج\,ی + د\,ء = ک$$

$$ا^{2}لا + ب^{2}ما + ج^{2}ی + د^{2}ء = ک^{2}$$

$$ا^{3}لا + ب^{3}ما + ج^{3}ی + د^{3}ء = ک^{3}$$

حسب سابق عمل کرنے سے

$$لا\,(ا^{3} + ف\,ا^{2} + ق\,ا + ر) = ک^{3} + ف\,ک^{2} + ق\,ک + ر$$

$$\therefore\ (ا - ب)(ا - ج)(ا - د)\,لا = (ک - ب)(ک - ج)(ک - د)$$

اِس طرح سے لا کی قیمت معلوم ہوگئی اور ما ، ی ، ء کی قیمتیں تشاکل سے لکھی جاسکتی ہیں۔

اُوپر کی مساواتوں کا حل نامعلوم سروں کے استعمال کرنے سے آسانی سے حاصل ہوجاتا ہے۔

مثال ۲ ۔ ثابت کرو کہ مساوات

$(\text{لا}-\text{ا})(\text{لا}-\text{ب})(\text{لا}-\text{ج})-\text{ف}^2(\text{لا}-\text{ا})-\text{گ}^2(\text{لا}-\text{ب})-\text{ھ}^2(\text{لا}-\text{ج})+۲\,\text{ف گ ھ}=۰$

کی اصلیں سب حقیقی ہیں۔

مساواتِ مفروضہ سے

$$(\text{لا}-\text{ا})\Big\{(\text{لا}-\text{ب})(\text{لا}-\text{ج})-\text{ف}^2\Big\}-\Big\{\text{گ}^2(\text{لا}-\text{ب})+\text{ھ}^2(\text{لا}-\text{ج})-۲\,\text{ف گ ھ}\Big\}=۰$$

فرض کرو کہ ف، ق مساوات درجہ دوم

$$(\text{لا}-\text{ب})(\text{لا}-\text{ج})-\text{ف}^2=۰$$

کی اصلیں ہیں، نیز فرض کرو کہ ف، ق سے کم نہیں ہے۔ اس مساوات کو حل کرنے سے

$$۲\,\text{لا}=\text{ب}+\text{ج}\pm\sqrt{(\text{ب}-\text{ج})^2+۴\,\text{ف}^2}\quad\ldots\ldots\ (۱)$$

اور جذرِ اصم کی قیمت ب ~ ج سے بڑی ہے، پس ف بڑا ہے ب یا ج سے اور ق چھوٹا ہے ب یا ج سے۔

مساواتِ مفروضہ میں لا کی بجائے بالترتیب یہ قیمتیں

$$+\infty،\ \text{ف}،\ \text{ق}،\ -\infty$$

درج کرنے سے نتائجِ ذیل

$$+\infty،\ -\Big(\text{گ}\sqrt{\text{ف}-\text{ب}}-\text{ھ}\sqrt{\text{ف}-\text{ج}}\Big)^2،\ +\Big(\text{گ}\sqrt{\text{ب}-\text{ق}}-\text{ھ}\sqrt{\text{ج}-\text{ق}}\Big)^2$$

$$-\infty$$

حاصل ہوتے ہیں کیونکہ $(\text{ف}-\text{ب})(\text{ف}-\text{ج})=\text{ف}^2=(\text{ب}-\text{ق})(\text{ج}-\text{ق})$

پس مساوات کی تین حقیقی اصلیں ہیں جن میں سے ایک ف سے بڑی ہے دوسری ف اور ق کے درمیان ہے اور تیسری ق سے کم ہے۔

اگر ف = ق تو (۱) سے $(\text{ب}-\text{ج})^2+۴\,\text{ف}^2=۰$، اس لئے

ب = ج اور ف = ۰، اس صورت میں مساواتِ مفروضہ یہ ہو جاتی ہے۔

$$(\text{لا}-\text{ب})\Big\{(\text{لا}-\text{ا})(\text{لا}-\text{ب})-\text{گ}^2-\text{ھ}^2\Big\}=۰$$

پس سب اصلیں حقیقی ہیں۔

اگر ف مساوات کی ایک اصل ہو تو تحقیقاتِ بالا ناکام رہتی ہے کیونکہ اس سے صرف یہ ظاہر ہوتا ہے کہ ق اور $+\infty$ کے درمیان صرف ایک اصل ہے اور وہ ف ہے، لیکن چونکہ حسبِ سابق ق سے کم بھی ایک حقیقی اصل ہے اس لئے تیسری اصل کو لازماً حقیقی ہونا چاہیئے۔ اسی طرح سے اگر ق مساواتِ مفروضہ کی اصل ہو تو یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ تمام اصلیں حقیقی ہیں۔

یہ مساوات جس پر یہاں بحث کی گئی ہے بہت اہمیت رکھتی ہے، ہندسۂ مجسمات میں یہ بار بار آتی ہے اور ہمیز کبھی کے نام سے موسوم ہوتی ہے۔

۵۸۶- عملی ریاضی کی اکثر شاخوں میں مساواتوں کا نظامِ ذیل بکثرت استعمال ہوتا ہے۔

مثال- ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

$$\frac{\text{لا}}{\text{ا} + \text{له}} + \frac{\text{ما}}{\text{ب} + \text{له}} + \frac{\text{ی}}{\text{ج} + \text{له}} = ۱$$

$$\frac{\text{لا}}{\text{ا} + \text{مه}} + \frac{\text{ما}}{\text{ب} + \text{مه}} + \frac{\text{ی}}{\text{ج} + \text{مه}} = ۱$$

$$\frac{\text{لا}}{\text{ا} + \text{نه}} + \frac{\text{ما}}{\text{ب} + \text{نه}} + \frac{\text{ی}}{\text{ج} + \text{نه}} = ۱$$

طہ میں ذیل کی مساوات پر غور کرو۔

$$\frac{\text{لا}}{\text{ا} + \text{طه}} + \frac{\text{ما}}{\text{ب} + \text{طه}} + \frac{\text{ی}}{\text{ج} + \text{طه}} = ۱ - \frac{(\text{طه} - \text{له})(\text{طه} - \text{مه})(\text{طه} - \text{نه})}{(\text{ا} + \text{طه})(\text{ب} + \text{طه})(\text{ج} + \text{طه})}$$

اور فی الحال لا، ما، ی کو معلوم مقداریں تصور کرو۔

جب اس مساوات کو کسروں سے پاک کیا جائے تو یہ طہ میں درجۂ دوم کی مساوات ہوتی ہے اور مساواتِ معلومہ کی وجہ سے طہ کی تین قیمتوں طہ = لہ، طہ = مہ، طہ = نہ سے پوری ہوتی ہے۔ پس یہ ایک مساواتِ متماثلہ ہے۔ (دیکھو دفعہ ۳۱۰)۔

لا کی قیمت معلوم کرنیکے لئے ا + طہ سے ضرب دو اور پھر ا + طہ = ۰ رکھو

اس طرح سے $$\text{لا} = \frac{(-\text{ا}-\text{ل})(-\text{ا}-\text{م})(-\text{ا}-\text{ن})}{(\text{ب}-\text{ا})(\text{ج}-\text{ا})}$$

یعنی $$\text{لا} = \frac{(\text{ا}+\text{ل})(\text{ا}+\text{م})(\text{ا}+\text{ن})}{(\text{ا}-\text{ب})(\text{ا}-\text{ج})}$$

تشاکل سے $$\text{ما} = \frac{(\text{ب}+\text{ل})(\text{ب}+\text{م})(\text{ب}+\text{ن})}{(\text{ب}-\text{ج})(\text{ب}-\text{ا})}$$

اور $$\text{ی} = \frac{(\text{ج}+\text{ل})(\text{ج}+\text{م})(\text{ج}+\text{ن})}{(\text{ج}-\text{ا})(\text{ج}-\text{ب})}$$

امثلہ نمبری ۳۵ (ع)

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

۱- $\text{لا}^۳ - ۱۸\,\text{لا} = ۳۵$

۲- $\text{لا}^۳ + ۷۲\,\text{لا} - ۱۷۲۰ = ۰$

۳- $\text{لا}^۳ + ۶۳\,\text{لا} - ۳۱۶ = ۰$

۴- $\text{لا}^۳ + ۲۱\,\text{لا} + ۳۴۲ = ۰$

۵- $۲۸\,\text{لا}^۳ - ۹\,\text{لا}^۲ + ۱ = ۰$

۶- $\text{لا}^۳ - ۱۵\,\text{لا}^۲ - ۳۳\,\text{لا} + ۸۴۷ = ۰$

۷- $۲\,\text{لا}^۳ + ۳\,\text{لا}^۲ + ۳\,\text{لا} + ۱ = ۰$

۸- ثابت کرو کہ مساوات $\text{لا}^۳ + ۱۲\,\text{لا} - ۱۲ = ۰$ کی حقیقی اصل $۲\sqrt[۳]{۲} - \sqrt[۳]{۴}$ ہے۔

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

۹- $\text{لا}^۴ - ۳\,\text{لا}^۲ - ۴۲\,\text{لا} - ۴۰ = ۰$

۱۰- $\text{لا}^۴ - ۱۰\,\text{لا}^۲ - ۲۰\,\text{لا} - ۱۶ = ۰$

۱۱- $\text{لا}^۴ + ۸\,\text{لا}^۳ + ۹\,\text{لا}^۲ - ۸\,\text{لا} - ۱۰ = ۰$

۱۲- $\text{لا}^۴ + ۲\,\text{لا}^۳ - ۷\,\text{لا}^۲ - ۸\,\text{لا} + ۱۲ = ۰$

۱۳- لا^{۴} - ۳ لا^{۲} - ۶ لا - ۲ = ۰ ۱۴- لا^{۴} - ۲ لا^{۳} - ۱۲ لا^{۲} + ۱۰ لا + ۳ = ۰

۱۵- ۴ لا^{۴} - ۲۰ لا^{۳} + ۳۳ لا^{۲} - ۲۰ لا + ۴ = ۰

۱۶- لا^{۵} - ۶ لا^{۴} - ۱۷ لا^{۳} + ۱۷ لا^{۲} + ۶ لا + ۱ = ۰

۱۷- لا^{۴} + ۹ لا^{۳} + ۱۲ لا^{۲} - ۸۰ لا - ۱۹۲ = ۰ جبکی مساوی اصلیں ہیں۔

۱۸- ق اور ر کا باہمی ربط دریافت کرو کہ مساوات لا^{۳} + ق لا + ر = ۰ ذیل کی شکل لا^{۴} = (لا^{۲} + ا لا + ب)^{۲} میں رکھی جا سکے۔

اِس سے مساوات ۸ لا^{۳} - ۳۶ لا + ۲۷ = ۰ کو حل کرو۔

۱۹- اگر لا^{۳} + ۳ ف لا^{۲} + ۳ ق لا + ر اور لا^{۲} + ۲ ف لا + ق میں ایک جزوِ ضربی مشترک ہو تو ثابت کرو کہ

۴ (ف^{۲} - ق) (ق^{۲} - ف ر) - (ف ق - ر)^{۲} = ۰

اگر اِن میں دو اجزائے ضربی مشترک ہوں تو ثابت کرو کہ

ف^{۲} - ق = ۰ اور ق^{۲} - ف ر = ۰

۲۰- اگر مساوات ا لا^{۳} + ۳ ب لا^{۲} + ۳ ج لا + د = ۰ کی دو اصلیں مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ اُن میں سے ہر ایک $\frac{\text{ب ج - ا د}}{\text{۲(ا ج - ب}^{۲}\text{)}}$ کے مساوی ہے۔

۲۱- ثابت کرو کہ مساوات لا^{۴} + ف لا^{۳} + ق لا^{۲} + ر لا + س = ۰ کو بطور ایک مساوات درجۂ دوم کے حل کیا جا سکتا ہے اگر ر^{۲} = ف^{۲} س

۲۲- مساوات لا^{۶} - ۱۸ لا^{۴} + ۱۶ لا^{۳} + ۲۸ لا^{۲} - ۳۲ لا + ۸ = ۰ کی ایک اصل $\sqrt{۶}$ - ۲ ہے، مساوات کو حل کرو۔

۲۳ - اگر عہ، بہ، جہ، لہ مساوات $لا^{4} + ق\, لا^{2} + ر\, لا + س = 0$ کی اصلیں ہوں تو وہ مساوات معلوم کرو جسکی اصلیں $بہ + جہ + لہ + (بہ\, جہ\, لہ)^{-1}$ وغیرہ وغیرہ ہوں۔

۲۴ - ثابت کرو کہ اگر مساوات $لا^{4} - ف\, لا^{3} + ق\, لا^{2} - ر\, لا + س = 0$ کی دو اصلوں کا مجموعہ باقی دو اصلوں کے مجموعہ کے برابر ہو تو $ف^{3} - 4\, ف\, ق + 8\, ر = 0$۔ اور اگر دو اصلوں کا حاصلِ ضرب باقی دو اصلوں کے حاصلِ ضرب کے مساوی ہو تو $ر^{2} = ف^{2}\, س$۔

۲۵ - مساوات $لا^{5} - 209\, لا + 56 = 0$ کی دو اصلیں ایسی ہیں جن کا حاصلِ ضرب ۱ ہے، یہ اصلیں معلوم کرو۔

۲۶ - مساوات $لا^{5} - 409\, لا + 285 = 0$ کی دو اصلیں معلوم کرو جن کا حاصل جمع ۵ ہے۔

۲۷ - اگر مساوات $لا^{ن} + ف_{1}\, لا^{ن-1} + ف_{2}\, لا^{ن-2} + \ldots\ldots + ف_{ن-1}\, لا + ف_{ن} = 0$ کی اصلیں ا، ب، ج، ..... ک ہوں تو ثابت کرو کہ

$$(1 + ا^{2})(1 + ب^{2})(1 + ج^{2}) \ldots\ldots (1 + ک^{2}) = (1 - ف_{2} + ف_{4} - \ldots)^{2}$$
$$+ (ف_{1} - ف_{3} + ف_{5} - \ldots\ldots)^{2}$$

۲۸ - مساوات $لا^{4} - 8\, لا^{3} + 21\, لا^{2} - 20\, لا + 5 = 0$ کی دو اصلوں کا حاصل جمع ۵ کے مساوی ہے۔ اس کی تشریح کرو کہ اگر اسی امر کی بنا پر مساوات کو حل کرنے کی کوشش کی جائے تو عمل ناکام رہتا ہے۔

متفرق مثالیں

۱۔ اگر ایک سلسلۂ حسابیہ کی ن، ۲ن، ۳ن رقموں کے حاصل جمع بالترتیب ج۱، ج۲، ج۳ ہوں تو ثابت کرو کہ ج۳ = ۳(ج۲ − ج۱)

۲۔ دو عدد معلوم کرو جن کا فرق، حاصل جمع، اور حاصل ضرب نسبت ۱ : ۷ : ۲۴ میں ہوں۔

۳۔ کونسے پیمانۂ تعدد کے مطابق ۲۵ کے اعداد بدلنے سے یہ دگنا ہو جاتا ہے۔

۴۔ معادلات ذیل کو حل کرو

(۱) (لا+۲)(لا+۳)(لا−۴)(لا−۵) = ۴۴

(۲) لا(ما+ی)+۲ = ۰ ، ما(ی−۲لا)+۲۱ = ۰ ، ی(۲لا−ما) = ۵

۵۔ ایک سلسلۂ حسابیہ کی پہلی رقم ا ہے، اگر اس کی پہلی ف رقموں کا حاصل جمع صفر ہو تو ثابت کرو کہ بعد کی ق رقموں کا حاصل جمع − ا(ف+ق)ق / (ف−۱) ہوگا۔

[آر۔ ایم۔ اے وولچ]

۶۔ معادلات ذیل کو حل کرو:۔

(۱) (ا+ب)(الا+ب)(ا−ب لا) = (ا²لا−ب²)(ا+ب لا)

(۲) لا^(۱/۲) + (۲لا−۳)^(۱/۲) = {۱۲(لا−۱)}^(۱/۲) [انڈیا سول سروس]

۷۔ ایک ایسا سلسلۂ حسابیہ معلوم کرو جسکی پہلی رقم ا ہو اور اس کی دوسری، دسویں اور چونتیسویں رقمیں سلسلۂ ہندسیہ میں ہوں۔

۸۔ اگر عہ، بہ مساوات لا² + ف لا + ق = ۰ کی اصلیں ہوں تو عہ² + عہ بہ + بہ² ، عہ³ + بہ³ ، عہ⁴ + عہ² بہ² + بہ⁴ کی قیمتیں معلوم کرو۔

R. M. A. Woolwich

۹- اگر ۲ لا = ا + $ا^{-۱}$ اور ۲ ما = ب + $ب^{-۱}$ تو

$لا\,ما + \sqrt{(لا^{۲} - ۱)(ما^{۲} - ۱)}$ کی قیمتیں معلوم کرو۔

۱۰- $\dfrac{(۴ + \sqrt{۱۵})^{\frac{۳}{۲}} + (۴ - \sqrt{۱۵})^{\frac{۳}{۲}}}{(۶ + \sqrt{۳۵})^{\frac{۳}{۲}} - (۶ - \sqrt{۳۵})^{\frac{۳}{۲}}}$ کی قیمت معلوم کرو

[آر- ایم- اے وولچ]

۱۱- اگر ایک کے خیالی جذر الکعب عہ اور بہ ہوں تو ثابت کرو کہ

$عہ^{۴} + بہ^{۴} + عہ^{-۱}\,بہ^{-۱} = ۰$

۱۲- ثابت کرو کہ کسی پیمانہ تعداد میں جسکی اصل ۴ سے زیادہ ہو عدد ۱۲۴۳۲ پورا تقسیم ہو جاتا ہے ۱۱۱ پر اور نیز ۱۱۲ پر۔

۱۳- ا اور ب دونوں ایک میل کی دوڑ میں بھاگنا شروع کرتے ہیں۔ پہلی بازی میں ا، ب کو ۱۱ گز کا وقفہ دیتا ہے اور منزل مقصود پر ۵۷ سکنڈ قبل پہنچ جاتا ہے، دوسری بازی میں ا، ب کو ۸۱ سکنڈ کا وقفہ دیتا ہے اور بالآخر ۸۸ گز پیچھے رہ جاتا ہے۔ بتاؤ کہ دونوں جداگانہ کتنے وقت میں ایک میل بھاگ سکتے ہیں۔

۱۴- مساوات $لا^{۲} - ما\,ی = ا^{۲}$، $ما^{۲} - ی\,لا = ب^{۲}$، $ی^{۲} - لا\,ما = ج^{۲}$، لا + ما + ی = ۰ میں سے لا، ما، ی کو ساقط کرو۔ [آر- ایم- اے وولچ]

۱۵- مساوات $ا\,لا^{۲} + ب\,لا\,ما + ج\,ما^{۲} = ب\,لا^{۲} + ج\,لا\,ما + ا\,ما^{۲} = د$ کو حل کرو۔

۱۶- ایک ملاح کو ایک جگہ تک جو ۴۸ میل کے فاصلہ پر واقع ہے کشتی (ڈرائی پاس) لیجانے اور واپس آنے میں ۱۴ گھنٹے لگتے ہیں، نیز وہ یہ معلوم کرتا ہے کہ جتنے عرصہ میں وہ ۴ میل رَو کے موافق جا سکتا ہے اُتنے ہی عرصہ میں ۳ میل رَو کے خلاف جا سکتا ہے۔ رَو کی رفتار دریافت کرو۔

۱۷ - (ا² + ا ب + ب ج + ج ا)(ب ج + ج ا + ا ب + ب²)(ب ج + ج ا + ا ب + ج²)

اور ۱ - لا + ۱۱ لا² - ۲۲ لا³ - ۱۵ لا⁴ - ۸ لا⁵ کا جذر نکالو۔

۱۸ - (۱ - ۳ لا)^(۱/۲) کی تفصیل میں لا⁹ کا سر معلوم کرو، نیز (۴/۳ لا² - ۳/(۲ لا))⁹ کی تفصیل میں وہ رقم معلوم کرو جس میں لا شامل نہ ہو۔

۱۹ - معادلات (۱) (۲لا - ۳)/(لا - ۱) - (۳لا - ۸)/(لا - ۲) + (لا + ۳)/(لا - ۳) = ۰

(۲) لا² - ما² = لاما - ا ب، (لا + ما)(ا لا + ب ما) = ۲ ا ب (ا + ب)

کو حل کرو۔ [ٹرنٹی کالج کیمبرج]

۲۰ - ثابت کرو کہ اگر ا (ب - ج) لا² + ب (ج - ا) لاما + ج (ا - ب) ما² مربع کامل ہو تو مقادیر ا، ب اور ج سلسلہ موسیقیہ میں ہونگی۔

[سینٹ کیتھرین کالج کیمبرج]

۲۱ - اگر (ما - ی)² + (ی - لا)² + (لا - ما)² = (ما + ی - ۲ لا)² + (ی + لا - ۲ ما)² + (لا + ما - ۲ ی)² اور لا، ما، ی حقیقی ہوں تو ثابت کرو کہ لا = ما = ی

[سینٹ کیتھرین کالج کیمبرج]

۲۲ - ۱۲ کے پیمانہ میں ۱۶۲۸۱۵ گ ۳ کا جذر نکالو اور بتاؤ کم کونسے پیمانہ میں کسر ۱/۵، ۲، ۲، ۲ سے تعبیر ہوگی۔

نوٹ - "گ" اصل گیارہ کو تعبیر کرتا ہے۔

۲۳ - اعداد ۱، ۲، ۳، ...، ن میں سے دو دو کو ضرب دینے سے جو حاصل ضرب حاصل ہوتے ہیں، اُن کا حاصل جمع معلوم کرو، نیز ثابت کرو کہ ان اعداد کے مکعبوں کے حاصل جمع اور مربعوں کے حاصل جمع میں جو فرق ہے حاصل جمع مذکور اس فرق کے نصف کے مساوی ہے۔

۲۴- ایک آدمی اور اُس کے لواحقین ایک ہفتہ میں ۲۰ ڈبل روٹیاں صَرف کرتے ہیں، اگر اس کی آمدنی ۵ فیصد بڑھ جائے اور روٹی کی قیمت میں ½ ۲ فیصد اضافہ ہو جائے تو اُسے چھ پنس فی ہفتہ فائدہ ہوتا ہے، لیکن اگر آمدنی کی شرح ½ ۷ فیصدی کم ہو جائے اور روٹی کی قیمت ۱۰ فیصدی گر جائے تو اُسے فی ہفتہ ½ ۱ پنس نقصان ہوتا ہے۔ اُس کی ہفتہ واری مزدوری اور روٹی کی قیمت دریافت کرو۔

۲۵- چار عدد سلسلۂ حسابیہ میں ہیں اُن کا حاصل جمع ۴۸ ہے، سروں پر کے عددوں کے حاصل ضرب کو وسطی عددوں کے حاصل ضرب کے ساتھ نسبت ۳۵:۲۷ ہے، اِن عددوں کو معلوم کرو۔

۲۶- ذیل کی مساواتوں کو حل کرو:-

(۱) ا(ب-ج)لا² + ب(ج-ا)لا + ج(ا-ب) = ۰

(۲) (لا-ا)(لا-ب) / (لا-ا-ب) = (لا-ج)(لا-د) / (لا-ج-د)　[ریاضی ٹرائی پاس]

۲۷- اگر √(ا-لا) + √(ب-لا) + √(ج-لا) = ۰ تو ثابت کرو کہ

(ا + ب + ج + ۳لا)(ا + ب + ج - لا) = ۴(ب ج + ج ا + ا ب)

اور اگر ∛ا + ∛ب + ∛ج = ۰ تو ثابت کرو کہ

(ا + ب + ج)³ = ۲۷ ا ب ج

۲۸- ایک ریل کے روانہ ہونے کے ایک گھنٹہ بعد اُس کو کوئی حادثہ پیش آتا ہے جس کی وجہ سے وہ ایک گھنٹہ تک رُک جاتی ہے اور بعد ازیں اپنی پہلی رفتار کی ⅗ رفتار کے ساتھ چلتی ہے اور منزلِ مقصود پر وقتِ معینہ سے ۳ گھنٹے دیر میں پہنچتی ہے۔ اگر حادثہ ۵۰ میل اور آگے چل کر پیش آتا تو بقدر ½ ۱ گھنٹے کے یہ جلدی پہنچ جاتی۔ مسافت کا طول دریافت کرو۔

۲۹ — معادلات ذیل کو حل کرو:-

۲ لا + ما = ۲ ی، ۹ ی − ۷ لا = ۶ ما، لا^{۳} + ما^{۳} + ی^{۳} = ۲۱۶

[آر، ایم ووِچ]

۳۰— ایک امتحان میں ۶ پرچے دیئے گئے ہیں۔ جن میں سے دو ریاضی کے ہیں، بتاؤ کہ کتنی مختلف ترکیبوں سے پرچے تقسیم کئے جا سکتے ہیں بشرطیکہ ریاضی کے پرچے یکے بعد دیگرے نہ ہوں۔

۳۱ — کتنے طریقوں سے ۵ پونڈ ۴ شلنگ ۲ پنس پورے ۶۰ سکوں میں ادا کئے جا سکتے ہیں جبکہ یہ سکے مشتمل ہوں نصف کراؤن، شلنگ اور چار پنس کے سکوں پر۔

۳۲ — اگر لا^{۳} + ا لا^{۲} + ۱۱ لا + ۶ اور لا^{۳} + ب لا^{۲} + ۱۴ لا + ۸ میں لا^{۲} + ف لا + ق کی شکل کا جزوِ ضربی مشترک ہو تو ا اور ب کی قیمتیں معلوم کرو۔

[لندن یونیورسٹی]

۳۳— ا، ب اور ج تینوں کے ایک کام کو ختم کرنے میں جو وقت صرف ہوتا ہے ا اکیلا اسی کام کو ۶ گھنٹے زیادہ میں ختم کر سکتا ہے، نیز ب اکیلا ایک گھنٹہ زیادہ میں اور ج اکیلا اس سے دگنے وقت میں کر سکتا ہے، بتاؤ تینوں ملکر کتنے عرصہ میں کام ختم کرتے ہیں۔

۳۴— اگر مساواتوں ا لا + ب ما = ۱، ج لا^{۲} + د ما^{۲} = ۱ کا صرف ایک حل ہو تو ثابت کرو کہ $\frac{ا^{۲}}{ج}$ + $\frac{ب^{۲}}{د}$ = ۱ اور لا = $\frac{ا}{ج}$، ما = $\frac{ب}{د}$

[ریاضی ٹرائی پاس]

۳۵ — (۱ − ۲ لا + ۲ لا^{۲})$^{-\frac{۱}{۲}}$ کو مسئلہ ثنائی کے ذریعہ پھیلا کر پہلی پانچ رقمیں معلوم کرو۔

۳۶ — اگر لا^{۲} + ف لا + ق = ۰ کی ایک اصل دوسری اصل کے مربع کے

مساوی ہو تو ثابت کرو کہ ف^{۳} - ق (۳ ف - ۱) + ق^{۲} = ۰

[پمبروک کالج، کیمبرج]

۳۷ - مساوات لا^{۳} - ۵ لا^{۲} - ۱۶ لا - ۵ = ۰ کو حل کرو

۳۸ - ا کی قیمت معلوم کرو جس سے کسرِ ذیل [کوئینز کالج، آکسفورڈ]

$$\frac{لا^{۳} - ا لا^{۲} + ۱۹ لا - ا - ۴}{لا^{۳} - (ا + ۱) لا^{۲} + ۲۳ لا - ا - ۷}$$

قابلِ تحویل ہو جائے کسرِ مذکور کو اس کی مفرد ترین رقوم میں لاؤ۔

[ریاضی ٹرائی پاس]

۳۹ - اگر ا، ب، ج، لا، یا، ی مقادیر حقیقی ہوں اور

$$(ا + ب + ج)^{۲} = ۳ (ب ج + ج ا + ا ب - لا^{۲} - یا^{۲} - ی^{۲})$$

تو ثابت کرو کہ ا = ب = ج اور لا = ۰، یا = ۰، ی = ۰ [کرائیسٹ کالج کیمبرج]

۴۰ - اگر لا کی قیمت $\frac{۶}{۷}$ کے مساوی ہو تو $(۱ - \frac{۲}{۳} لا)^{-\frac{۳}{۲}}$ کی تفصیل میں بڑی سے بڑی رقم معلوم کرو۔

[ای مینوئل کالج، کیمبرج]

۴۱ - دو ایسے عدد معلوم کرو کہ اگر ان کے حاصل جمع کو اُن کے مربعوں کے حاصل جمع سے ضرب دیا جائے تو حاصل ضرب ۵۰۰۰ کے مساوی ہو اور اگر اُن کے فرق کو اُنکے مربعوں کے فرق کے ساتھ ضرب دیا جائے تو حاصل ضرب ۳۵۲ ہو۔

[کرائیسٹ کالج، کیمبرج]

۴۲ - اگر لا = لہ ا، یا = (لہ - ۱) ب، ی = (لہ - ۳) ج اور

$$لہ = \frac{ا^{۲} + ب^{۲} + ۳ ج^{۲}}{ا^{۲} + ب^{۲} + ج^{۲}}$$

تو لا^{۲} + یا^{۲} + ی^{۲} کو ا، ب، ج کی رقوم کی سادہ ترین شکل میں لاؤ۔

[سڈنی کالج کیمبرج]

۴۳ - مساواتوں (۱) لا^{۴} + ۳ لا^{۲} = ۱۶ لا + ۶۰

(۲) $ما^{۲} + ی^{۲} - لا = ی^{۲} + لا^{۲} - ما = لا^{۲} + ما^{۲} - ی = ۱$ کو حل کرو۔

[کارپس کالج آکسفورڈ]

۴۴۔ اگر لا، ما، ی سلسلۂ موسیقیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ

$$لوک\ (لا + ی) + لوک\ (لا - ۲\ ما + ی) = ۲\ لوک\ (لا - ی)$$

۴۵۔ ثابت کرو کہ $\frac{۱}{۲} + \frac{۳ \times ۱}{۴ \times ۲}\left(\frac{۱}{۴}\right) + \frac{۵ \times ۳ \times ۱}{۶ \times ۴ \times ۲}\left(\frac{۱}{۴}\right)^{۲} + \ldots = \frac{۴}{۳}\left(۲ - \sqrt{۳}\right)\sqrt{۳}$

[ایمینول کالج، کیمبرج]

۴۶۔ اگر $\frac{۳\ لا + ۲\ ما}{۳\ ا - ۲\ ب} = \frac{۳\ ما + ۲\ ی}{۳\ ب - ۲\ ج} = \frac{۳\ ی + ۲\ لا}{۳\ ج - ۲\ ا}$ تو ثابت کرو کہ

$$۵\,(لا + ما + ی)(۵\ ج + ۴\ ب - ۳\ ا) = (۹\ لا + ۸\ ما + ۱۳\ ی)(ا + ب + ج)$$

[کرائسٹ کالج کیمبرج]

۴۷۔ ۱۷ حروفِ صحیح اور ۵ حروفِ علت سے ۴ حرفوں والے کتنے الفاظ بن سکتے ہیں جن میں سے ہر ایک کے بیچ میں دو مختلف حروفِ علت ہوں اور دونوں سروں پر (ایک ہی یا مختلف) حروفِ صحیح ہوں۔

۴۸۔ کسی مسئلہ پر ۶۰۰ اشخاص نے رائے دی اور مسئلہ مسترد ہو گیا۔ انہی اشخاص نے اسی مسئلہ پر از سرِ نو رائے دی اور جتنی کثرتِ رائے سے پہلے یہ مسئلہ مسترد ہوا تھا اب اس سے دگنی رایوں کی کثرت سے یہ مسئلہ منظور ہو گیا۔ بعد کی کثرت کی نسبت ابتدائی کثرت کے ساتھ ۸ : ۷ ہے۔ بتاؤ کہ کتنے اشخاص نے اپنی رائے بدل لی۔

[سینٹ جون کالج۔ کیمبرج]

۴۹۔ ثابت کرو کہ

$$لوک\ \frac{(۱ + لا)^{\frac{۱-لا}{۲}}}{(۱ - لا)^{\frac{۱+لا}{۲}}} = لا + \frac{۵\ لا^{۳}}{۳ \times ۲} + \frac{۹\ لا^{۵}}{۵ \times ۴} + \frac{۱۳\ لا^{۷}}{۷ \times ۶} + \ldots\ldots$$

[کرائسٹ کالج۔ کیمبرج]

۵۰ — آدمیوں کی ایک جماعت کو تین قطاروں کے ایک مجوف مربع کی شکل میں کھڑا کیا گیا اور یہ دیکھا گیا کہ اگر ۲۵ آدمی زیادہ ہوتے تو اُن کو ایک ایسے ٹھوس مربع کی شکل میں کھڑا کیا جا سکتا تھا جس کے ہر ایک ضلع میں آدمیوں کی تعداد مجوف مربع کے ہر ایک ضلع میں آدمیوں کی تعداد کے جذر سے بقدر ۲۲ کے زیادہ ہوتی آدمیوں کی تعداد معلوم کرو۔

۵۱ — مساواتاتِ ذیل کو حل کرو:-

$$(۱)\quad \sqrt[3]{(ا + لا)^۲} + ۲\sqrt[3]{(ا - لا)^۲} = ۳\sqrt[3]{(ا^۲ - لا^۲)}$$

$$(۲)\quad (لا - ا)^{\frac{۱}{۲}}(لا - ب)^{\frac{۱}{۲}} - (لا - ج)^{\frac{۱}{۲}}(لا - د)^{\frac{۱}{۲}} = (ا - ج)^{\frac{۱}{۲}}(ب - د)^{\frac{۱}{۲}}$$

۵۲ — ثابت کرو کہ $\sqrt[3]{۴} = ۱ + \frac{۲}{۶} + \frac{۵ \times ۲}{۱۲ \times ۶} + \frac{۸ \times ۵ \times ۲}{۱۸ \times ۱۲ \times ۶} + \ldots\ldots$

[سٹڈنی کالج، کیمبرج]

۵۳ — $\sqrt[3]{۶(۵لا + ۶)} - \sqrt[3]{۵(۶لا - ۱۱)} = ۱$

[کوئینز کالج، کیمبرج]

۵۴ — دو برتن ہیں جن میں سے ایک میں ا گیلن شراب ہے اور دوسرے میں ب گیلن پانی۔ ہر ایک برتن میں سے ج گیلن نکال کر دوسرے برتن میں منتقل کر دئے گئے ہیں۔ یہی عمل بارہا کیا گیا ہے، اگر ج (ا + ب) = اب تو ثابت کرو کہ پہلے عمل کے بعد ہر ایک برتن میں شراب کی مقدار وہی رہے گی۔

۵۵ — م اور ن کا اوسطِ حسابی اور ا اور ب کا اوسطِ ہندسی دونوں $\frac{م ا + ن ب}{م + ن}$ کے مساوی ہیں، م اور ن کو ا اور ب کی رقوم میں دریافت کرو۔

۵۶ — اگر لا، ما، ی ایسے ہوں کہ اُن کا حاصل جمع مستقل ہو اور اگر (ی + لا − ۲ ما) (لا + ما − ۲ ی) ایسے بدلیں جیسے ما ی تو ثابت کرو کہ ۲ (ما + ی) − لا ایسے بدلتا ہے جیسے ما ی۔

[ای مینیول کالج، کیمبرج]

۵۷ ۔ ثابت کرو کہ اگر ن بڑا ہو ۳ سے تو

$$\text{١} \times \text{٢} \times \text{ج}^{\text{ن}}_{\text{ر}} - \text{٢} \times \text{٣} \times \text{ج}^{\text{ن}}_{\text{ر}-\text{١}} + \text{٣} \times \text{٤} \times \text{ج}^{\text{٥}}_{\text{ر}-\text{٢}} - \ldots\ldots + (-\text{١})^{\text{ر}}(\text{ر}+\text{١})(\text{ر}+\text{٢}) = \text{٢} \times \text{ج}^{\text{ن}-\text{٣}}_{\text{ر}}$$

[کرائسٹ کالج ۔ کیمبرج]

۵۸ ۔ معادلات ذیل کو حل کرو:۔

$$(\text{١})\ \sqrt{\text{٢لا}-\text{١}} + \sqrt{\text{٣لا}-\text{٢}} = \sqrt{\text{٤لا}-\text{٣}} + \sqrt{\text{٥لا}-\text{٤}}$$

$$(\text{٢})\ \text{٤}\left\{(\text{لا}^{\text{٢}}-\text{١٦})^{\frac{\text{٣}}{\text{٤}}} + \text{٨}\right\} = \text{لا}^{\text{٢}} + \text{١٦}(\text{لا}^{\text{٢}}-\text{١٦})^{\frac{\text{١}}{\text{٤}}}$$

(سینٹ جانز کالج کیمبرج)

۵۹ ۔ ثابت کرو کہ اگر $\dfrac{\text{ما}-\text{ی}}{\text{١}+\text{ی ما}} + \dfrac{\text{ی}-\text{لا}}{\text{١}+\text{ی لا}} + \dfrac{\text{لا}-\text{ما}}{\text{١}+\text{لا ما}} = \text{٠}$ تو مقادیر لا، ما، ی میں سے دو باہم مساوی ہونگی ۔

۶۰ ۔ ایک قوم میں کل اشخاص کی تعداد ف ہے، اِن میں سے ا فیصد لکھ پڑھ سکتے ہیں صرف مردوں میں سے ب فیصد اور صرف عورتوں میں سے ج فیصد لکھ پڑھ سکتے ہیں، بتاؤ کہ اِس قوم میں کتنے مرد اور کتنی عورتیں ہیں ۔

۶۱ ۔ اگر $\text{لا} = \left(\dfrac{\text{ا}}{\text{ب}}\right)^{\frac{\text{٢اب}}{\text{ا}^{\text{٢}}-\text{ب}^{\text{٢}}}}$ تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{اب}}{\text{ا}^{\text{٢}}+\text{ب}^{\text{٢}}}\left(\text{لا}^{\frac{\text{ا}}{\text{ب}}} + \text{لا}^{\frac{\text{ب}}{\text{ا}}}\right) = \left(\frac{\text{ا}}{\text{ب}}\right)^{\frac{\text{ا}^{\text{٢}}+\text{ب}^{\text{٢}}}{\text{ا}^{\text{٢}}-\text{ب}^{\text{٢}}}}$$

[ایمینول کالج ۔ کیمبرج]

۶۲ ۔ ثابت کرو کہ $(\text{١}-\text{لا}+\text{لا}^{\text{٢}}-\text{لا}^{\text{٣}})^{-\text{١}}$ کی تفصیل میں $\text{لا}^{\text{٤ن}}$ کا سر ایک ہے ۔

۶۳ ۔ مساوات $\dfrac{\text{لا}-\text{ا}}{\text{ب}} + \dfrac{\text{لا}-\text{ب}}{\text{ا}} = \dfrac{\text{ب}}{\text{لا}-\text{ا}} + \dfrac{\text{ا}}{\text{لا}-\text{ب}}$ کو حل کرو ۔

(لندن یونیورسٹی)

۶۴ ۔ ن رقموں کا (۱) سلسلۂ حسابیہ (۲) سلسلۂ موسیقیہ معلوم کرو ۔ جن میں سے

ہر ایک کی پہلی اور آخری رقمیں بالترتیب ا اور ب ہوں، ثابت کرو کہ پہلے سلسلہ کی رؤیں رقم اور دوسرے سلسلہ کی (ن - ر + ۱) ویں رقم کا حاصل ضرب ا ب ہے۔

۶۵ ـــ اگر مساوات (۱ - ق + ف²/۲) لا² + ف (۱ + ق) لا + ق (ق - ۱) + ف²/۲ = ۰
کی اصلیں مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ ف² = ۴ ق　　(آر، ایم اے، وولچ)

۶۶ـــ اگر ا² + ب² = ۷ ا ب تو ثابت کرو کہ
لوک {۱/۳ (ا + ب)} = ۱/۲ (لوک ا + لوک ب)　　(کوئینز کالج - آکسفورڈ)

۶۷ ـــ اگر ن ایک اصل ہو مساوات

لا² (۱ - ا ج) - لا (ا² + ج²) - (۱ + ا ج) = ۰

کی، اور اگر ا اور ج کے درمیان ن اوسطِ موسیقی درج کئے جائیں تو ثابت کرو کہ پہلے اور آخری اوسطوں کا فرق ا ج (ا - ج) کے مساوی ہوگا۔
(وادھم کالج - آکسفورڈ)

۶۸ ـــ اگر ج(ن+۲، ۸) : پ(ن+۲، ۴) = ۵۷ : ۱۶ تو ن کی قیمت معلوم کرو۔

۶۹ ـــ ایک شخص ۶ ۱/۲ فیصدی والے سرکاری قرضہ میں کچھ رقم لگاتا ہے، اگر قیمت ۳ پونڈ کم ہوتی تو اُسے اپنی رقم پر ۱/۴ فیصد سود زیادہ ملتا۔ بتاؤ کہ قرضہ کس قیمت پر دیا گیا ہے۔

۷۰ ـ مساوات {(لا² + لا + ۱)³ - (لا² + ۱)³} {(لا² - لا + ۱)³ - (لا² + ۱)³ + لا³}
= ۳ {(لا⁴ + لا² + ۱)³ - (لا⁴ + ۱)³ - لا⁶} کو حل کرو۔
(مرٹن کالج - آکسفورڈ)

۷۱ ـ مساواتوں لا² + ا لا + ب = ۰ اور لا ما + ل (لا + ما) + م = ۰

میں سے لا کو ساقط کرنے سے جو مساوات درجہ دوم کا میں حاصل ہوتی ہے اگر اِس مساوات کی اصلیں وہی ہوں جو لا میں ابتدائی مساوات درجہ دوم کی ہیں تو ثابت کرو کہ ا = ۲ ل اور ب = م یا ب + م = ا ل

(آر، ایم، اے وولچ)

۷۲ - اگر یہ معلوم ہو کہ لوک ۲ = ۳۰۱۰۳ء اور لوک ۳ = ۴۷۷۱۲ء تو ذیل کی مساواتوں کو حل کرو

$$(۱)\ ۶^{\text{لا}} = \frac{۱۰}{۳} - ۶^{-\text{لا}} \qquad (۲)\ \sqrt{۵^{\text{لا}}} + \sqrt{۵^{-\text{لا}}} = \frac{۲۹}{۱۰}$$

۷۳ - دو اعداد معلوم کرو جن کا حاصل جمع ۹ ہو اور جن کی چوتھی قوتوں کا حاصل جمع ۲۴۱۷ ہو۔

جامعۂ لندن

۷۴ - ا ۴ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے چلنا شروع کرتا ہے۔ ا کے روانہ ہونے کے $۳\frac{۳}{۴}$ گھنٹے بعد ب اُسکو پکڑنے کے لئے نکلتا ہے اور پہلے گھنٹے میں $۴\frac{۱}{۲}$ میل چلتا ہے، دوسرے گھنٹے میں $۴\frac{۳}{۴}$ میل، تیسرے میں ۵ میل اور اسی طرح ہر گھنٹہ میں $\frac{۱}{۴}$ میل کے حساب سے زیادہ تیز چلتا ہے، بتاؤ کہ وہ کتنے گھنٹوں میں ا کو پکڑ لیگا۔

۷۵ - ثابت کرو کہ $(\sqrt{۳} + ۱)^{۲\text{ن}}$ کے عین بعد جو صحیح عدد آتا ہے اُس میں جزوِ ضربی $۲^{\text{ن}+۱}$ شامل ہوتا ہے۔

۷۶ - طبعی اعداد کے سلسلہ کو ذیل کے گروہوں میں

۱؛ ۲، ۳، ۴؛ ۵، ۶، ۷، ۸، ۹؛ علیٰ ہذا القیاس

تقسیم کیا گیا ہے، ثابت کرو کہ ن ویں گروہ میں جو اعداد ہونگے اُن کا مجموعہ $(\text{ن}-۱)^{۳} + \text{ن}^{۳}$ کے مساوی ہوگا۔

۷۷ - ثابت کرو کہ سلسلہ

$$\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{\underline{|۲}}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲} + \frac{۱\times۳}{\underline{|۳}}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۳} + \frac{۱\times۳\times۵}{\underline{|۴}}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۴} + \ldots\ldots$$

کی ن رقموں کا مجموعہ $۱ - \dfrac{۱\times۳\times۵\times۷\times\ldots(۲\text{ن}-۱)}{۲^{\text{ن}}\ \underline{|\text{ن}}}$ کے مساوی ہے

(آر، ایم، اے وولچ)

۷۸۔ ثابت کرو کہ اگر ن بالترتیب ۳م، ۳م + ۱، ۳م + ۲ کی شکل کا ہو تو $\frac{۱ + ۲لا}{۱ - لا + لا^۲}$ کی تفصیل میں $لا^ن$ کا سر بالترتیب $(-۱)^{\frac{ن}{۳}}۳$، $۳(-۱)^{\frac{ن-۱}{۳}}$، $۲(-۱)^{\frac{ن-۲}{۳}}$ ہوگا۔

۷۹۔ ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

$$(۱)\quad \frac{لا}{ا} = \frac{ما}{ب} = \frac{ی}{ج} = \frac{لا\,ما\,ی}{لا + ما + ی}$$

$$(۲)\quad \frac{لا}{ما} + \frac{ما}{ی} + \frac{ی}{لا} = \frac{ما}{لا} + \frac{ی}{ما} + \frac{لا}{ی} = لا + ما + ی = ۳$$

[یونیورسٹی کالج ۔ آکسفورڈ]

۸۰۔ اگر سلسلہ ا، لا، ما، ی، ب سلسلہ حسابیہ ہو تو لا ما ی کی قیمت $۷\frac{۱}{۲}$ کے مساوی ہے اور اگر یہ سلسلہ موسیقیہ ہو تو یہ $۳\frac{۳}{۵}$ کے مساوی ہے، ا اور ب کو مثبت صحیح عدد مان کر اِن کی قیمتیں دریافت کرو۔

۸۱۔ اگر $ا\,ما - ب\,لا = ج\sqrt{(لا - ا)^۲ + (ما - ب)^۲}$ تو ثابت کرو کہ لا، ما کی کوئی حقیقی قیمت مساواتِ مذکور کو پورا نہ کرے گی سوائے اُس صورت کے جبکہ $ا^۲ + ب^۲ < ج^۲$۔

۸۲۔ اگر $(لا + ۱)^۲$ بڑا ہو ۵لا − ۱ سے اور چھوٹا ہو ۷لا − ۳ سے تو لا کی صحیح عددی قیمت دریافت کرو۔

۸۳۔ اگر اُن صحیح عددوں کی تعداد جن کے لوکارتموں کا ممیز ف ہو $ف_۱$ ہو اور اُن صحیح عددوں کی تعداد جن کے مقلوبوں کے لوکارتموں کا ممیز − ق ہو $ق_۱$ ہو تو ثابت کرو کہ

$$لوک\,ف_۱ - لوک\,ق_۱ = ف - ق + ۱$$

۸۴ — کتنے طریقوں سے ۲۰ شلنگ ۵ آدمیوں میں اس طرح تقسیم ہو سکتے ہیں کہ کسی آدمی کو ۳ شلنگ سے کم نہ ملیں۔

۸۵ — ایک شخص کی یہ خواہش ہے کہ اُس کی دونوں نابالغ لڑکیوں کو سن بلوغ پر پہنچنے پر مساوی رقوم ملیں۔ اس غرض کے لئے اُس نے یہ وصیت کی کہ بڑی لڑکی کو ایک رقم کا جو اُس نے اپنی وفات کے وقت ۸۸ پر ۴ فیصدی والے اسٹاک میں جمع کی اُس کا کل سود ملے اور چھوٹی لڑکی کو اس رقم کا کل سود ملے جو پہلی رقم سے بقدر ۳۵۰۰ پونڈ کم ہے اور ۶۳ پر ۳ فیصدی فی سال والے سٹاک میں اُسی وقت جمع کی گئی ہے اگر ان لڑکیوں کی عمریں اُن کے باپ کی وفات کے وقت بالترتیب ۱۷ اور ۱۳ سال کی ہوں تو بتاؤ کہ دونوں صورتوں میں کتنی رقم جمع کی گئی ہے اور ہر ایک لڑکی کو کتنی رقم ملے گی۔

۸۶ — ۷ کے پیمانہ میں ایک عدد تین ہندسوں پر مشتمل ہے، اگر اسی عدد کو ۹ کے پیمانہ میں لکھا جائے تو اس کے عدد بلحاظ ترتیب الٹ جاتے ہیں، بتاؤ کہ وہ کونسا عدد ہے۔
(سینٹ جانز کالج کیمبرج)

۸۷ — اگر کسی سلسلۂ حسابیہ کی م رقموں کا حاصل جمع بعد کی ن رقموں کے حاصل جمع کے مساوی ہو اور نیز بعد کی ف رقموں کے حاصل جمع کے مساوی ہو تو ثابت کرو کہ

$$(\text{م}+\text{ن})\left(\frac{1}{\text{م}}-\frac{1}{\text{ف}}\right)=(\text{م}+\text{ف})\left(\frac{1}{\text{م}}-\frac{1}{\text{ن}}\right)$$

(سینٹ جانز کالج - کیمبرج)

۸۸ — ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{(\text{ما}-\text{ی})^2}+\frac{1}{(\text{ی}-\text{لا})^2}+\frac{1}{(\text{لا}-\text{ما})^2}=\left(\frac{1}{\text{ما}-\text{ی}}+\frac{1}{\text{ی}-\text{لا}}+\frac{1}{\text{لا}-\text{ما}}\right)^2$$

[آر - ایم - اے - دہلی]

۸۹ — اگر م منفی یا مثبت ہو اور ایک سے بڑا ہو تو ثابت کرو کہ $1^{\text{م}}+3^{\text{م}}+5^{\text{م}}+\dots+(2\text{ن}-1)^{\text{م}}>\text{ن}^{\text{م}+1}$

(ایمینول کالج - کیمبرج)

۹۰ ۔ اگر ذیل کی تین مساواتوں

$$لا^{2} - ف_{1}لا + ق_{1} = 0 \quad ، \quad لا^{2} - ف_{2}لا + ق_{2} = 0 \quad ، \quad لا^{2} - ف_{3}لا + ق_{3} = 0$$

میں سے ہر دو مساواتوں کے زوج کی ایک اصل مشترک ہو تو ثابت کرو کہ

$$ف_{1}^{2} + ف_{2}^{2} + ف_{3}^{2} + 4(ق_{1} + ق_{2} + ق_{3}) = 2(ف_{2}ف_{3} + ف_{3}ف_{1} + ف_{1}ف_{2})$$

۹۱ ۔ ا اور ب دونوں ایک ہی رستہ پر مختلف اوقات میں ایک ہی شرح رفتار سے ہنٹنگڈن سے لنڈن کی طرف روانہ ہوئے ۔ لنڈن سے ۵۰ ویں میلی پتھر پر ا بطخوں کے ایک جھنڈ سے جا ملا جو دو گھنٹے میں تین میل کی رفتار سے جا رہا تھا اور اس کے دو گھنٹے بعد ایک گاڑی سے ملا جو ۴ گھنٹے میں ۹ میل کی رفتار سے جا رہی تھی ۔ ب بطخوں کے اُسی جھنڈ سے ۴۵ ویں میلی پتھر پر ملا اور ۳۱ ویں میلی پتھر پر پہنچنے کے عین ۴۰ منٹ پہلے گاڑی کو ملا ۔ بتاؤ کہ جب ا لنڈن پہنچ گیا تو ب اُس وقت کہاں تھا ۔ (سینٹ جانز کالج، کیمبرج)

۹۲ ۔ اگر ا + ب + ج + د = ۰ تو ثابت کرو کہ

$$اب ج + ب ج د + ج د ا + د اب = \sqrt{(ب ج - اد)(ج ا - ب د)(اب - ج د)}$$

[آر-ایم-اے وولچ]

۹۳ ۔ ایک سلسلۂ حسابیہ، سلسلۂ ہندسیہ، سلسلۂ موسیقیہ کی پہلی دو رقمیں ا اور ب ہیں، ثابت کرو کہ ان کی (ن + ۲) ویں رقمیں سلسلۂ ہندسیہ میں ہونگی

اگر $$\frac{ب^{2ن+2} - ا^{2ن+2}}{ب ا (ب^{2ن} - ا^{2ن})} = \frac{ن + 1}{ن}$$ (ریاضی ٹرائی پاس)

۹۴ ۔ ثابت کرو کہ اگر $\frac{لا}{(لا - ا)(لا - ب)}$ کو لا کی صعودی قوتوں میں پھیلایا جائے تو $لا^{ن}$ کا سر

$\frac{ا^ن - ب^ن}{ا - ب} \times \frac{1}{ا^ن ب^ن}$ ہوگا اور $\frac{(1 + لا^2)^ن}{(1 - لا)^3}$ کی تفصیل میں $لا^{2ن}$ کا سر

$2^{ن-1}(ن^2 + 4ن + 2)$ ہوگا۔ (ایمینول کالج - کمبرج)

۹۵ - مساواتوں $4\sqrt{لا - ما} + \frac{1}{2}\, 4\sqrt{لا + ما} = \frac{لا - 1}{4\sqrt{لا - ما}}$

اور $لا^2 + ما^2 : لاما = 34 : 15$

کو حل کرو۔ [سینٹ جانز کالج - کمبرج]

۹۶ - جملہ $1 + \frac{1}{3+}\, \frac{1}{2+}\, \frac{1}{3+}\, \frac{1}{2+}\, ...$ کی قیمت درجہ دوم کے جذرِ اصم کی شکل میں معلوم کرو۔ [آر، ایم، اے، وولچ]

۹۷ - ثابت کرو کہ ہر صحیح عدد کا مکعب دو مربعوں کے فرق کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے اور کسی طاق عدد کا مکعب دو مربعوں کے فرق کی شکل میں دو طرح سے لکھا جا سکتا ہے۔ نیز کسی دو متصل صحیح عددوں کے مکعبوں کا فرق دو مربعوں کے فرق کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔ [جیسس کالج، کمبرج]

۹۸ - ذیل کے سلسلۂ لامتناہی کی قیمت معلوم کرو۔

$\frac{1}{\lfloor 3} + \frac{2}{\lfloor 5} + \frac{3}{\lfloor 7} + \frac{4}{\lfloor 9} + ...$ [ایمینول کالج - کمبرج]

۹۹ - اگر $لا = \frac{ا}{ب+}\, \frac{ج}{د+}\, \frac{ا}{ب+}\, \frac{ج}{د+}\, ...$

اور $ما = \frac{ج}{د+}\, \frac{ا}{ب+}\, \frac{ج}{د+}\, \frac{ا}{ب+}\, ...$

تو ثابت کرو کہ $ب لا - د ما = ا - ج$ [کرائیسٹ کالج، کمبرج]

۱۰۰ - ذیل کے سلسلۂ متوالی کا تفاعلِ تکوینی، ن رقموں کا حاصل جمع اور ن ویں رقم معلوم کرو۔

$۱ + ۵ لا + ۷ لا^۲ + ۱۷ لا^۳ + ۳۱ لا^۴ + \dots\dots$

۱۰۱ — اگر ا، ب، ج سلسلۂ موسیقیہ میں ہوں تو

$$(۱) \quad \frac{ا + ب}{۲ ا - ب} + \frac{ج + ب}{۲ ج - ب} > ۴$$

$$(۲) \quad ب^۲ (ا - ج)^۲ = ۲ \left\{ ج^۲ (ب - ا)^۲ + ا^۲ (ج - ب)^۲ \right\}$$

[پمبرک کالج، کمبرج]

۱۰۲ — اگر ا، ب، ج تمام مقادیر حقیقی ہوں اور $لا^۳ - ۳ ب^۲ لا + ۲ ج^۳$ پورا تقسیم ہو جائے $لا - ا$ پر اور نیز $لا - ب$ پر تو ثابت کرو کہ $ا = ب = ج$ یا $ا = -۲ب = -۲ج$

[جیسس کالج - آکسفورڈ]

۱۰۳ — ثابت کرو کہ تین متصل طاق عددوں کے مربعوں کے حاصل جمع میں جب ایک کا اضافہ کر دیا جائے تو مجموعہ ۱۲ پر پورا تقسیم ہو جاتا ہے لیکن ۲۴ پر تقسیم نہیں ہوتا۔

۱۰۴ — ثابت کرو کہ اگر ا منفی ہو تو $ا لا^۲ + ۲ ب لا + ج$ کی بڑی سے بڑی قیمت اور اگر ا مثبت ہو تو چھوٹی سے چھوٹی قیمت $\frac{ا ج - ب^۲}{ا}$ ہوگی۔

اگر $لا^۴ + ما^۴ + ی^۴ + ما^۲ ی^۲ + ی^۲ لا^۲ + لا^۲ ما^۲ = ۲ لا ما ی (لا + ما + ی)$ اور لا، ما، ی سب حقیقی ہوں تو ثابت کرو کہ $لا = ما = ی$

[سینٹ جانز کالج کیمبرج]

۱۰۵ — ثابت کرو کہ $ہا \sqrt{\frac{۱ - \sqrt{۱ - لا^۲}}{۲}}$ کی تفصیل یہ ہے

$$\frac{لا}{۲} + \frac{۱ \times ۳}{۲ \times ۴} \times \frac{لا^۳}{۶} + \frac{۱ \times ۳ \times ۵ \times ۷}{۲ \times ۴ \times ۶ \times ۸} \times \frac{لا^۵}{۱۰} + \dots\dots$$

۱۰۶ — اگر ع، ہ مساوات

$$لا^۲ + ف لا + ق = ۰ ، \quad لا^{۲ن} + ف^ن لا^ن + ق^ن = ۰$$

کی اصلیں ہوں جہاں ن کوئی جفت صحیح عدد ہے تو ثابت کرو کہ

$\frac{\text{عہ}}{\text{بہ}}$ ، $\frac{\text{بہ}}{\text{عہ}}$ مساوات $\text{لا}^{\text{ن}} + ۱ + (\text{لا} + ۱)^{\text{ن}} = ۰$ کی اصلیں ہیں۔

[پمبرک کالج۔ کیمبرج]

۱۰۷ — لامتناہی کسورِ مسلسل $\text{ا} + \frac{\text{ب}}{۲\text{ا} +}\ \frac{\text{ب}}{۲\text{ا} +}\ \frac{\text{ب}}{۲\text{ا} +}$ ......

اور $\text{ج} + \frac{\text{د}}{۲\text{ج} +}\ \frac{\text{د}}{۲\text{ج} +}\ \frac{\text{د}}{۲\text{ج} +}$ ......

کے مربعوں کا فرق معلوم کرو۔

[کرائیسٹ کالج کیمبرج]

۱۰۸ — ایک خاص رقم چند آدمیوں میں تقسیم کی گئی ہے، دوسرے آدمی کو پہلے آدمی سے ایک شلنگ زیادہ ملتا ہے، تیسرے آدمی کو دوسرے سے ۲ شلنگ زیادہ چوتھے کو تیسرے سے ۳ شلنگ زیادہ اور علیٰ ہذا القیاس، اگر پہلے آدمی کو ایک شلنگ ملے اور آخری آدمی کو ۳ پونڈ ۷ شلنگ تو آدمیوں کی تعداد اور رقم کی مقدار معلوم کرو۔

۱۰۹ — معادلاتِ ذیل کو حل کرو۔

(۱) $\frac{\text{لا}}{\text{ا}} + \frac{\text{ما} + \text{ی}}{\text{ب} + \text{ج}} = \frac{\text{ما}}{\text{ب}} + \frac{\text{ی} + \text{لا}}{\text{ج} + \text{ا}} = \frac{\text{ی}}{\text{ج}} + \frac{\text{لا} + \text{ما}}{\text{ا} + \text{ب}} = ۲$

(۲) $\frac{\text{لا}^۲ + \text{ما}^۲}{\text{لا}\,\text{ما}} + \text{لا}^۲ + \text{ما}^۲ = ۱۳\frac{۱}{۳}$ ، $\frac{\text{لا}\,\text{ما}}{\text{لا}^۲ + \text{ما}^۲} + \text{لا}\,\text{ما} = ۳\frac{۳}{۱۰}$

۱۱۰ — اگر ا اور ب مثبت اور غیر مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ

$\text{ا}^{\text{ن}} - \text{ب}^{\text{ن}} > \text{ن}(\text{ا} - \text{ب})(\text{اب})^{\frac{\text{ن} - ۱}{۲}}$

[سینٹ کیتھرین کالج۔ کیمبرج]

۱۱۱ — $\frac{۷۶۳}{۳۹۶}$ کو کسرِ مسلسل کی شکل میں لاؤ اور اس سے لا اور ما کی وہ چھوٹی

سے چھوٹی قیمتیں معلوم کرو جو مساوات ۳۹۶ لا − ۷۶۳ ما = ۱۲ کو پورا کریں۔

۱۱۲ — ب اور ج ملکر ایک کام کو جتنے دن میں ختم کرتے ہیں اس سے م گنے وقت میں ا اکیلا اُسی کام کو کرسکتا ہے ، ا اور ج ملکر اسی کام کو جتنے دنوں میں ختم کرسکتے ہیں ب اکیلا اُس سے ن گنے وقت میں اُسے کرسکتا ہے ، اسی طرح سے ا اور ب مل کر اُس کام کو جتنے دنوں میں ختم کر سکتے ہیں اس سے ف گنے وقت میں ج اکیلا اُس کام کو ختم کر لیتا ہے ۔ ثابت کرو کہ ا ، ب اور ج کو اُس کام کے جداگانہ ختم کرنے میں جتنے دن لگتے ہیں وہ اِس تناسب م + ۱ : ن + ۱ : ف + ۱ میں ہیں ۔

نیز ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{م}}{\text{م}+1}+\frac{\text{ن}}{\text{ن}+1}+\frac{\text{ف}}{\text{ف}+1}=2$$

[آر، ایم، اے ۔ وولیچ]

۱۱۳ — ایک آبی شفاخانہ کے اخراجات کا کچھ حصہ مستقل ہے اور کچھ حصہ اسکے مقیموں کی تعداد پر موقوف ہے ، ہر ایک مقیم ۶۵ پونڈ سالانہ ادا کرتا ہے اگر مقیموں کی تعداد ۵۰ ہو تو سالانہ فائدہ ۹ پونڈ فی کس ہوتا ہے ، لیکن اگر تعداد ۶۰ ہو تو فائدہ ۱۰ پونڈ ۱۳ شلنگ ۴ پنس فی کس ہوتا ہے ، اگر مقیموں کی تعداد ۸۰ ہو تو بتاؤ کہ فی کس کتنا فائدہ ہوگا ۔

۱۱۴ — اگر $\text{لا}^2\,\text{ما} = 2\,\text{لا} - \text{ما}$ اور لا^2 بڑا نہ ہو ۱ سے تو ثابت کرو کہ

$$4\left(\text{لا}^2+\frac{\text{لا}^6}{3}+\frac{\text{لا}^{10}}{5}+\cdots\right)=\text{ما}^2+\frac{\text{ما}^4}{2}+\frac{\text{ما}^6}{3}+\cdots$$

[پیٹر ہوس ۔ کیمبرج]

۱۱۵ — اگر $\frac{\text{لا}}{\text{ا}^2-\text{ما}^2}=\frac{\text{ما}}{\text{ا}^2-\text{لا}^2}=\frac{1}{\text{ب}}$ اور $\text{لا}\,\text{ما}=\text{ج}^2$ تو ثابت کرو کہ جب ا اور ج غیر مساوی ہوں تو

$$(\text{ا}^2-\text{ج}^2)^2-\text{ب}^2\text{ج}^2=0 \quad \text{اور} \quad \text{ا}^2+\text{ج}^2-\text{ب}^2=0$$

۱۱۶ — اگر $(1 + لا + لا^2)^{3ر} = 1 + ک_1 لا + ک_2 لا^2 + \ldots\ldots$

اور $(لا - 1)^{3ر} = لا^{3ر} - ج_1 لا^{3ر-1} + ج_2 لا^{3ر-2} - \ldots\ldots$

تو ثابت کرو کہ (۱) $1 - ک_1 + ک_2 - \ldots\ldots = 1$

اور (۲) $1 - ک_1 ج_1 + ک_2 ج_2 - \ldots\ldots = \pm \frac{|3ر}{|ر \; |2ر}$

[آر، ایم، اے ووِلچ]

۱۱۷ — ذیل کی مساواتوں کو حل کرو:

(۱) $(لا - ما)^2 + 2اب = الا + ب ما$ ، $لا ما + اب = ب لا + ا ما$

(۲) $لا^2 - ما^2 + ی^2 = 6$ ، $2 ما ی - ی لا + 2 لا ما = 13$ ، $لا - ما + ی = 2$

۱۱۸ — اگر ن مثبت مقادیر $ا_1$، $ا_2$، $ا_3$، ...... $ا_ن$ ہوں اور اگر ان میں سے دو دو کے حاصل ضربوں کے جذر معلوم کئے جائیں تو ثابت کرو کہ

$$\sqrt{ا_1 ا_2} + \sqrt{ا_1 ا_3} + \ldots < \frac{ن-1}{2}(ا_1 + ا_2 + \ldots\ldots + ا_ن)$$

اور اس سے مستنبط کرو کہ دو دو کو ضرب دینے سے جو حاصل ضرب حاصل ہوتے ہیں اُن کے جذروں کا اوسطِ حسابی اُن مقادیر کے اوسطِ حسابی سے کم ہوتا ہے۔

[آر، ایم، اے ووِلچ]

۱۱۹ — اگر $ب^2 لا^4 + ا^2 ما^4 = ا^2 ب^2$ اور $ا^2 + ب^2 = لا^2 + ما^2 = 1$ تو ثابت کرو کہ

$$ب^4 لا^6 + ا^4 ما^6 = (ب^2 لا^4 + ا^2 ما^4)^2$$

(انڈیا سول سروس)

۱۲۰ — اُن سلسلوں کی پہلی ن رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو جن کی ر ویں رقمیں بالترتیب (۱) $\frac{2ر + 1}{ر^2(ر+1)^2}$ ، (۲) $(ا + ر ب) لا^{ن-ر}$ ہوں۔

[سینٹ جونز کالج، کیمبرج]

۱۲۱— $\frac{\text{لا} + ۲}{۲\text{لا}^۲ + ۳\text{لا} + ۶}$ کی بڑی سے بڑی قیمت معلوم کرو۔

۱۲۲ — ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

(۱) $۱ + \text{لا}^۴ = ۷(۱ + \text{لا})^۴$

(۲) $۳\text{لاما} + ۲\text{ی} = \text{لای} + ۶\text{ما} = ۲\text{مای} + ۳\text{لا} = ۰$

۱۲۳— ایک جملہ ثنائی کی تفصیل میں $\text{ا}_۱$، $\text{ا}_۲$، $\text{ا}_۳$، $\text{ا}_۴$ چار متصل سر ہیں، ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{ا}_۱}{\text{ا}_۱ + \text{ا}_۲} + \frac{\text{ا}_۳}{\text{ا}_۳ + \text{ا}_۴} = \frac{۲\text{ا}_۲}{\text{ا}_۲ + \text{ا}_۳}$$

(کوئینز کالج - کیمبرج)

۱۲۴— $\frac{\text{لا}^۳ + ۷\text{لا}^۲ - \text{لا} - ۸}{(\text{لا}^۲ + \text{لا} + ۱)(\text{لا}^۲ - ۳\text{لا} - ۱)}$ کو کسورِ جزوی میں تحلیل کرو، نیز اگر

$\frac{۳\text{لا} - ۸}{\text{لا}^۲ - ۴\text{لا} - ۴}$ کو لا کی صعودی قوتوں میں پھیلایا جائے تو پھیلاؤ کی عام رقم معلوم کرو۔

۱۲۵— متوالی سلسلہ $\frac{۵}{۴} - \frac{۱}{۲}\text{لا} + ۲\text{لا}^۲ + \text{ل لا}^۳ + ۵\text{لا}^۴ + ۷\text{لا}^۵ + \ldots\ldots$

میں پیمانۂ ربط درجہ دوم کا ایک جملہ ہے، چوتھی رقم کا نامعلوم سر اور ربط کا پیمانہ دریافت کرو، نیز سلسلہ کی رقمِ عامہ معلوم کرو۔

(آر، ایم، اے وولچ)

۱۲۶— اگر لا، ما، ی غیر مساوی ہوں اور اگر

$$۲\text{ا} - ۳\text{ما} = \frac{(\text{ی} - \text{لا})^۲}{\text{ما}} \quad \text{اور} \quad ۲\text{ا} - ۳\text{ی} = \frac{(\text{لا} - \text{ما})^۲}{\text{ی}}$$

تو ثابت کرو کہ $۲\text{ا} - ۳\text{لا} = \frac{(\text{ما} - \text{ی})^۲}{\text{لا}}$ اور $\text{لا} + \text{ما} + \text{ی} = \text{ا}$

(ٹرائی پاس)

۱۲۷ - ذیل کی مساواتوں کو حل کرو

(۱) لاما + ۶ = ۲لا - لا^۲ ، لاما - ۹ = ۲ما - ما^۲

(۲) (الا)^(لوک ا) = (ب ما)^(لوک ب) ، ب^(لوک لا) = ا^(لوک ما)

۱۲۸ - ذیل کے جملات کی انتہائی قیمتیں معلوم کرو:-

(۱) لا جذر(لا^۲ + ا^۲) - جذر(لا^۴ + ا^۴) جبکہ لا ← ∞

(۲) (جذر(۱ + ۲لا) - جذر(۳لا)) / (جذر(۳ + لا) - ۲جذر(لا)) جبکہ لا ← ۱

(لنڈن یونیورسٹی)

۱۲۹ - دو عددوں کا حاصل ضرب ۱۹۲ ہے اور ان عددوں کے جو عادِ اعظم اور ذو اضعاف اقل ہیں اُن کے اوسط حسابیہ اور اوسط موسیقیہ کا خارج قسمت ۳ ۲۵/۴۸ ہے۔ ان عددوں کو معلوم کرو۔

(آر، ایم، اے۔ وو لچ)

۱۳۰ - ذیل کی مساواتوں کو حل کرو:-

(۱) ۳جذرِ سوم(۱۳لا + ۳۷) - ۳جذرِ سوم(۱۳لا - ۳۷) = ۳جذرِ سوم(۲)

(۲) ب جذر(۱ - ی^۲) + ج جذر(۱ - ما^۲) = ا

ج جذر(۱ - لا^۲) + ا جذر(۱ - ی^۲) = ب

ا جذر(۱ - ما^۲) + ب جذر(۱ - لا^۲) = ج

۱۳۱ - ثابت کرو کہ لاتناہی تک ذیل کے سلسلہ

۱/(۲^۳ |۳) - (۱×۳)/(۲^۴ |۴) + (۱×۳×۵)/(۲^۵ |۵) - ...... کا حاصل جمع

۲۳/۲۴ - ۲/۳ جذر(۲) ہے۔

(ریاضی ٹرائی پاس)

۱۳۲ — تین ہندسوں کا ایک عدد اِس قسم کا ہے کہ ہندسوں کی ترتیب اُلٹ دینے سے اِس عدد کی قیمت دُگنی ہو جاتی ہے، ثابت کرو پہلے اور آخری ہندسہ سے جو عدد بنتا ہے اُس پر بھی یہی امر صادق آئیگا۔ نیز ثابت کرو کہ ایسا عدد، تعدد کے ہر تین پیمانوں میں سے صرف ایک میں حاصل ہو سکتا ہے۔

[ریاضی ٹرائی پاس]

۱۳۳ — $\frac{۱ + لا^۳}{(۱ - لا^۲)(۱ - لا)}$ اور $۱ - لا + لا^۲$ کے حاصلِ ضرب میں $لا^{۱۲}$ اور $لا^ر$ کے سر معلوم کرو۔

(آر، ایم، اے وولیچ)

۱۳۴ — ایک خریدار بازار کے سامنے زمین کا ایک ٹکڑا خریدنا چاہتا ہے ٹکڑے کی شکل کو ایک ایسا مستطیل ہونا چاہیے کہ اس کی پیشانی کے طول کا تین گنا اور اس کی گہرائی کا دُگنا ۹۶ گز کے مساوی ہو، بتاؤ کہ وہ زیادہ سے زیادہ کتنے مربع گز زمین لے۔

[لنڈن یونیورسٹی]

۱۳۵ — ثابت کرو کہ

$$(ا + ب + ج + د)^۴ + (ا + ب - ج - د)^۴ + (ا - ب + ج - د)^۴ + (ا - ب - ج + د)^۴$$
$$- (ا + ب + ج - د)^۴ - (ا + ب - ج + د)^۴ - (ا - ب + ج + د)^۴$$
$$- (-ا + ب + ج + د)^۴ = ۱۹۲ \, ا ب ج د$$

[ٹرنٹی کالج، کیمبرج]

۱۳۶ — ا، ب، ج کی ایسی قیمتیں معلوم کرو کہ ہر دو جملات

$لا^۴ + ا لا^۳ + ب لا^۲ + ج لا + ۱$ اور $لا^۴ + ۲ ا لا^۳ + ۲ ب لا^۲ + ۲ ج لا + ۱$

مربع کامل ہوں۔

(لنڈن یونیورسٹی)

۱۳۷ — ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

(۱) $\frac{\sqrt[۳]{ما + لا} - \sqrt[۳]{ما - لا}}{\sqrt[۳]{ما + لا} + \sqrt[۳]{ما - لا}} = ۳$ ، $لا^۲ + ما^۲ = ۶۵$

(۲) $\sqrt{۲لا^{۲}+۱}+\sqrt{۳لا^{۲}-۱}=\frac{۲}{\sqrt{۳-۲لا^{۲}}}$

۱۳۸ — ایک کسان نے ۱۰ بھیڑیں کسی خاص قیمت پر فروخت کیں اور ۵ اور بھیڑیں فی بھیڑ دس شلنگ کم پر فروخت کیں۔ دونوں رقمیں پونڈوں میں انہی دو ہندسوں سے لکھی جاسکتی ہیں۔ ایک بھیڑ کی قیمت معلوم کرو۔

۱۳۹ — ن رقموں تک جمع کرو۔

(۱) $(۲ن-۱)+۲(۲ن-۳)+۳(۲ن-۵)+\ldots\ldots$

(۲) سلسلہ ۱، ۳، ۶، ۱۰، ۱۵،...... کی رقموں کے مربعے

(۳) $ن^{۲}(ن^{۲})$ کی طاق رقمیں (ٹرنٹی کالج - کمبرج)

۱۴۰ — اگر عہ، بہ، جہ مساوات $لا^{۳}+قلا+ر=۰$ کی اصلیں ہوں تو ثابت کرو

کہ $۳(عہ^{۲}+بہ^{۲}+جہ^{۲})(عہ^{۵}+بہ^{۵}+جہ^{۵})=۵(عہ^{۳}+بہ^{۳}+جہ^{۳})(عہ^{۴}+بہ^{۴}+جہ^{۴})$

(سینٹ جانز کالج کیمبرج)

۱۴۱ — مساواتوں (۱) $لا(۳ما-۵)=۴$، $ما(۲لا+۷)=۲۷$ | (۲) $لا^{۲}+ما^{۲}+ی^{۲}=۴۹۵$، $لا+ما+ی=۱۵$، $لاما ی=۱۰۵$

کو حل کرو۔ (ٹرنٹی کالج - کمبرج)

۱۴۲ — اگر ا، ب، ج، مساوات $لا^{۳}+قلا^{۲}+ر=۰$ کی اصلیں ہوں تو وہ مساوات بناؤ جسکی اصلیں $ا+ب-ج$، $ب+ج-ا$، $ج+ا-ب$ ہوں۔

۱۴۳ — ذیل کے سلسلوں کو جمع کرو:-

(۱) $ن+(ن-۱)لا+(ن-۲)لا^{۲}+\ldots\ldots+۲لا^{ن-۲}+لا^{ن-۱}$ (اکسفورڈ موڈز)

(۲) $۳-لا-۲لا^{۲}-۱۶لا^{۳}-۲۸لا^{۴}-۶۷۶لا^{۵}+\ldots\ldots$ تا لا متناہی

(۳) $۶+۹+۱۴+۲۳+۴۰+\ldots\ldots$ ن رقموں تک۔ (اکسفورڈ موڈز)

۱۴۴- ذیل کی مساواتوں میں سے لا، ما، ی کو ساقط کرو:-

$$\text{لا}^{-1} + \text{ما}^{-1} + \text{ی}^{-1} = \text{ا}^{-1} \quad ، \quad \text{لا} + \text{ما} + \text{ی} = \text{ب}$$

$$\text{لا}^{2} + \text{ما}^{2} + \text{ی}^{2} = \text{ج}^{2} \quad \quad \text{لا}^{3} + \text{ما}^{3} + \text{ی}^{3} = \text{د}^{3}$$

اور ثابت کرو کہ اگر لا، ما، ی محدود اور تعداداً غیر مساوی ہوں تو ب، ج کے مساوی نہیں ہو سکتا۔
(آر، ایم، اے وولیچ)

۱۴۵ — مساوات $۳\,\text{لا}^{۲}(\text{لا}^{۲} + ۸) + ۱۶(\text{لا}^{۳} - ۱) = ۰$ کی سب اصلیں غیر مساوی نہیں ہیں، اصلوں کو معلوم کرو۔

۱۴۶ — ایک مسافر ایک خاص مقام سے روانہ ہو کر پہلے دن ایک میل چلتا ہے، دوسرے دن ۳ میل، تیسرے دن ۵ میل اور علیٰ ہذا القیاس ہر روز گزشتہ دن کی نسبت ۲ میل زیادہ چلتا ہے، اُس کے روانہ ہونے کے تین دن بعد ایک اور آدمی روانہ ہوتا ہے جو پہلے دن ۱۲ میل چلتا ہے، دوسرے دن ۱۳ میل اور علیٰ ہذا القیاس بتاؤ کہ دوسرا آدمی پہلے آدمی کو کتنے دن میں پکڑے گا۔ دوہرے جواب کی تشریح کرو۔

۱۴۷ — سلسلہ $\frac{۱}{۳+}\;\frac{۱}{۲+}\;\frac{۱}{۱+}\;\frac{۱}{۳+}\;\frac{۱}{۲+}\;\frac{۱}{۱+}\cdots$ کی قیمت معلوم کرو۔

۱۴۸ — مساوات $\text{لا}^{۳} + ۳\,\text{ا}\,\text{لا}^{۲} + ۳(\text{ا}^{۲} - \text{ب}\,\text{ج})\,\text{لا} + \text{ا}^{۳} + \text{ب}^{۳} + \text{ج}^{۳} - ۳\,\text{ا}\,\text{ب}\,\text{ج} = ۰$ کو حل کرو
(انڈیا سول سروس)

۱۴۹ — اگر ن کوئی عدد مفرد ہو جو نہ ا کو پورا تقسیم کرے، نہ ب کو اور نہ ا + ب کو تو ثابت کرو کہ $\text{ا}^{\text{ن}-۲}\,\text{ب} - \text{ا}^{\text{ن}-۳}\,\text{ب}^{۲} + \text{ا}^{\text{ن}-۴}\,\text{ب}^{۳} - \cdots\cdots + \text{ا}\,\text{ب}^{\text{ن}-۲}$ بقدر ا کے ن کے ضعف سے بڑا ہے۔
(سینٹ جانز کالج - کیمبرج)

۱۵۰ — ایک سلسلہ کا حاصل جمع لاتناہی تک $(۱ - \text{ا}\,\text{ب}\,\text{لا}^{۲})(۱ - \text{ا}\,\text{لا})^{-۲}(۱ - \text{ب}\,\text{لا})^{-۲}$ ہے، اس سلسلہ کی ن ویں رقم اور ن رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

(آکسفورڈ موڈز)

۱۵۱ — اگر ا، ب، ج مساوات $لا^۳ + ف لا + ق = ۰$ کی اصلیں ہوں تو وہ مساوات معلوم کرو۔ جسکی اصلیں $\frac{ب^۲ + ج^۲}{ا}$، $\frac{ج^۲ + ا^۲}{ب}$، $\frac{ا^۲ + ب^۲}{ج}$ ہوں۔
(ٹرنٹی کالج۔ کیمبرج)

۱۵۲ — ثابت کرو کہ $(ما + ی - ۲لا)^۴ + (ی + لا - ۲ما)^۴ + (لا + ما - ۲ی)^۴$

$$= ۱۸(لا^۲ + ما^۲ + ی^۲ - مای - ی لا - لاما)^۲$$
(کلیر کالج۔ کیمبرج)

۱۵۳ — ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

(۱) $لا^۳ - ۳۰لا + ۱۳۳ = ۰$ کارڈن کے طریقے سے

(۲) $لا^۵ - ۴لا^۴ - ۱۰لا^۳ + ۴۰لا^۲ + ۹لا - ۳۶ = ۰$ جسکی اصلیں
± ا، ± ب، ج کی شکل کی ہیں۔

۱۵۴ — ایک شخص کی فی گھنٹہ کام کرنے کی مقدار اُس کی ایک گھنٹہ کی تنخواہ کے بالراست متناسب ہے اور جتنے گھنٹے فی روز کام کرتا ہے اُس کے جذر کے بالعکس متناسب ہے۔ وہ ایک کام کو فی دن ۹ گھنٹے بحساب ایک شلنگ فی گھنٹہ کام کرکے ۶ دن میں ختم کرلیتا ہے۔ بتاؤ کہ وہ اُسی کام کو ۱۶ گھنٹے فی روز بحساب ا شلنگ ۶ پنس فی گھنٹہ کام کرکے کتنے دنوں میں ختم کرسکیگا۔

۱۵۵ — اگر سلسلہ $۱ \times ۲ + ۲ \times ۳ + ۳ \times ۴ + ۴ \times ۵ + \cdots$ کی ن رقموں کا حاصل جمع $ج_ن$ سے تعبیر ہو اور سلسلہ $\frac{۱}{۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴} + \frac{۱}{۲ \times ۳ \times ۴ \times ۵} + \frac{۱}{۳ \times ۴ \times ۵ \times ۶} + \cdots\cdots$ کی ن-۱ رقموں کا حاصل جمع $ص_{ن-۱}$ سے تو ثابت کرو $۱۸ ج_ن ص_{ن-۱} - ج_ن + ۲ = ۰$
(موڈلن کالج۔ آکسفورڈ)

۱۵۶ — ذیل کی مساواتوں کو حل کرو :-

(۱) $(\text{۱۲لا} - ۱)(\text{۶لا} - ۱)(\text{۴لا} - ۱)(\text{۳لا} - ۱) = ۵$

(۲) $$\frac{۱}{۵}\cdot\frac{(\text{لا}+۱)(\text{لا}-۳)}{(\text{لا}+۲)(\text{لا}-۴)} + \frac{۱}{۹}\cdot\frac{(\text{لا}+۳)(\text{لا}-۵)}{(\text{لا}+۴)(\text{لا}-۶)} - \frac{۲}{۱۳}\cdot\frac{(\text{لا}+۵)(\text{لا}-۷)}{(\text{لا}+۶)(\text{لا}-۸)} = \frac{۹۲}{۵۸۵}$$

(سینٹ جونز کالج - کیمبرج)

۱۵۷ — ایک سال کے شروع میں ایک مکان کی قیمت ۲۵۰ پونڈ ہے لیکن وقت کی بربادی کی وجہ سے ہر سال اس کی قیمت شروع سال کی قیمت کا ۱۰ فی صدی گر جاتی ہے۔ بتاؤ کہ کتنے سالوں کے بعد اس کی قیمت ۲۵ پونڈ سے کم ہو جائیگی۔ معلوم ہے لوک ۳ = ۴۷۷۱۲۱۳ء

۱۵۸ — ثابت کرو کہ ذیل کے لا تناہی سلسلے

$$۱ + \frac{۱}{۴} + \frac{۱\times۴}{۴\times۸} + \frac{۱\times۴\times۷}{۴\times۸\times۱۲} + \frac{۱\times۴\times۷\times۱۰}{۴\times۸\times۱۲\times۱۶} + \cdots\cdots$$

$$۱ + \frac{۲}{۶} + \frac{۲\times۵}{۶\times۱۲} + \frac{۲\times۵\times۸}{۶\times۱۲\times۱۸} + \frac{۲\times۵\times۸\times۱۱}{۶\times۱۲\times۱۸\times۲۴} + \cdots\cdots$$

مساوی ہیں۔

(پیٹر ہاؤس - کیمبرج)

۱۵۹ — ذیل کی مساوات متماثلہ کو ثابت کرو۔

$$\left\{۱ - \frac{\text{لا}}{\text{عہ}} + \frac{\text{لا}(\text{لا}-\text{عہ})}{\text{عہ بہ}} - \frac{\text{لا}(\text{لا}-\text{عہ})(\text{لا}-\text{بہ})}{\text{عہ بہ جہ}} + \cdots\cdots\right\}$$

$$\times\left\{۱ + \frac{\text{لا}}{\text{عہ}} + \frac{\text{لا}(\text{لا}+\text{عہ})}{\text{عہ بہ}} + \frac{\text{لا}(\text{لا}+\text{عہ})(\text{لا}+\text{بہ})}{\text{عہ بہ جہ}} + \cdots\cdots\right\}$$

$$= ۱ - \frac{\text{لا}^۲}{\text{عہ}^۲} + \frac{\text{لا}^۲(\text{لا}^۲-\text{عہ}^۲)}{\text{عہ}^۲\,\text{بہ}^۲} - \frac{\text{لا}^۲(\text{لا}^۲-\text{عہ}^۲)(\text{لا}^۲-\text{بہ}^۲)}{\text{عہ}^۲\,\text{بہ}^۲\,\text{جہ}^۲} + \cdots\cdots$$

(ٹرنٹی کالج - کیمبرج)

۱۶۰ — اگر ن کوئی مثبت صحیح عدد ہو جو ایک سے بڑا ہو تو ثابت کرو کہ

$$ن^{۵} - ۵ن^{۳} + ۶۰ن^{۲} - ۵۶ن$$

۱۲۰ کا ضعف ہے ۔

(واڈھم کالج آکسفورڈ)

۱۶۱ — ایک کام کے کرنے کے لئے چند آدمی بلائے گئے ۔ اگر وہ سب ایک ساتھ کام شروع کریں تو ۲۴ گھنٹے میں کام ختم ہو جاتا ہے، لیکن وہ ایک ساتھ شروع کرنے کی بجائے مساوی وقفوں کے بعد شروع کرتے ہیں حتیٰ کہ سب آدمی کام پر لگ جاتے ہیں اور پھر کام کو ختم کر دیتے ہیں، اگر ہر ایک کی مزدوری اس کے کام کے متناسب ہو اور پہلے آدمی کو آخری آدمی کی نسبت ۱۱ گنی مزدوری ملے تو بتاؤ کہ کتنے عرصہ میں کام ختم ہوا ۔

۱۶۲ — ذیل کی مساواتوں کو حل کرو:

$$(۱)\quad \frac{لا}{ما^{۲} - ۳} = \frac{ما}{لا^{۲} - ۳} = \frac{۷}{لا^{۳} + ما^{۳}}$$

$$(۲)\quad ما^{۲} + ی^{۲} - لا(ما + ی) = ا^{۲}$$

$$ی^{۲} + لا^{۲} - ما(ی + لا) = ب^{۲}$$

$$لا^{۲} + ما^{۲} - ی(لا + ما) = ج^{۲}$$

(پمبروک کالج - کیمبرج)

۱۶۳ — مساوات ذیل کو حل کرو

$$ا^{۳}(ب - ج)(لا - ب)(لا - ج) + ب^{۳}(ج - ا)(لا - ج)(لا - ا) + ج^{۳}(ا - ب)(لا - ا)(لا - ب) = ۰$$

نیز ثابت کرو کہ اگر دونوں اصلیں مساوی ہوں تو $\frac{۱}{\sqrt{ا}} \pm \frac{۱}{\sqrt{ب}} \pm \frac{۱}{\sqrt{ج}} = ۰$

(سینٹ جونز کالج - کیمبرج)

۱۶۴ — سلاسل ذیل کو جمع کرو۔

(۱) $۱ \times ۲ \times ۴ + ۲ \times ۳ \times ۵ + ۳ \times ۴ \times ۶ + \ldots\ldots$ ن رقموں تک۔

(۲) $\frac{۲^{۱}}{|\underline{۳}} + \frac{۲^{۲}}{|\underline{۴}} + \frac{۲^{۳}}{|\underline{۵}} + \ldots\ldots$ تالا متناہی

۱۶۵ — اگر ا، ب، ج، د چار مثبت غیر مساوی مقادیر ہوں اور $س = ا + ب + ج + د$ تو ثابت کرو کہ $(س - ا)(س - ب)(س - ج)(س - د) > ۸۱\,ا\,ب\,ج\,د$

(پیٹرہاؤس، کیمبرج)

۱۶۶ — ذیل کی مساواتوں کو حل کرو:

(۱) $\sqrt{لا + ا} - \sqrt{ما - ا} = \frac{۵}{۲}\sqrt{ا}$ ، $\sqrt{لا - ا} - \sqrt{ما + ا} = \frac{۳}{۲}\sqrt{ا}$

(۲) $لا + ما + ی = لا^{۲} + ما^{۲} + ی^{۲} = \frac{۱}{۲}(لا^{۳} + ما^{۳} + ی^{۳}) = ۳$

(ریاضی ٹرائی پاس)

۱۶۷ — مساواتوں $ل\,لا + م\,ما + ن\,ی = م\,لا + ن\,ما + ل\,ی = ن\,لا + ل\,ما + م\,ی = ک^{۲}(ل^{۲} + م^{۲} + ن^{۲}) = ۱$ میں ل، م، ن کو ساقط کرو۔

۱۶۸ — اختصار کرو

$$\frac{ا(ب + ج - ا)^{۲} + \ldots + \ldots + (ب + ج - ا)(ج + ا - ب)(ا + ب - ج)}{ا^{۲}(ب + ج - ا) + \ldots + \ldots + (ب + ج - ا)(ج + ا - ب)(ا + ب - ج)}$$

(ریاضی ٹرائی پاس)

۱۶۹ — ثابت کرو کہ جملہ

$$(لا^{۲} - ما\,ی)^{۳} + (ما^{۲} - ی\,لا)^{۳} + (ی^{۲} - لا\,ما)^{۳} - ۳(لا^{۲} - ما\,ی)(ما^{۲} - ی\,لا)(ی^{۲} - لا\,ما)$$

مربع کامل ہے، اس کا جذر معلوم کرو۔ (لنڈن یونیورسٹی)

۱۷۰ — ا، ب، ج تین مقام ہیں، ایک شخص ا سے ب تک پیدل چلتا ہے، ب سے ج تک گاڑی میں جاتا ہے اور ج سے ا تک گھوڑے پر جاتا ہے، اس طرح سے وہ اپنا سفر $۱۵\frac{۱}{۲}$ گھنٹے میں ختم کر لیتا ہے، اگر وہ ا سے ب تک گاڑی میں جائے، ب سے ج تک گھوڑے پر جائے اور ج سے ا تک

پیدل چلے تو ۱۲ گھنٹے میں سفر طے ہو۔ وہ کُل سفر کو پیدل ۲۲ گھنٹے میں، گھوڑے پر $\frac{۱}{۲}$ ۸ گھنٹے میں، اور گاڑی پر ۱۱ گھنٹے میں طے کر سکتا ہے۔ نیز ایک میل پیدل، ایک میل گھوڑے پر اور ایک میل گاڑی پر سفر کرنے میں کل نصف گھنٹہ صرف ہوتا ہے۔ اس کے سفر کرنے کی شرحیں اور ان مقامات کے درمیانی فاصلے معلوم کرو۔

۱۷۱ — ثابت کرو کہ ن^۷ − ۷ ن^۵ + ۱۴ ن^۳ − ۸ ن پورا تقسیم ہو سکتا ہے ۸۴۰ پر جہاں ن کوئی مثبت صحیح عدد ہے جو ۳ سے کم نہیں ہے۔

۱۷۲ — ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

(۱) √(لا^۲ + ۱۲ ما) + √(ما^۲ + ۱۲ لا) = ۳۳ ، لا + ما = ۲۳

(۲) ء(ما − لا)/(ی − ء) = ا ، ی(ما − لا)/(ی − ء) = ب ، ما(ء − ی)/(لا − ما) = ج ، لا(ء − ی)/(لا − ما) = د

۱۷۳ — اگر ن مثبت غیر مساوی مقادیر ا، ب، ج، ..... کا حاصل جمع س ہو تو ثابت کرو کہ

س/(س − ا) + س/(س − ب) + س/(س − ج) + ... > ن^۲/(ن − ۱)

(ریاضی ٹرائی پاس)

۱۷۴ — ایک سوداگر نے کچھ مقدار کپاس کی خریدی، پھر اس کپاس کا تیل سے تبادلہ کر لیا اور بعد ازاں تیل کو فروخت کر ڈالا۔ اُسے معلوم ہوا کہ کپاس کا وزن ہنڈرڈ ویٹوں میں، تیل کے اُن گیلنوں کی تعداد جو فی ہنڈرڈ ویٹ کپاس کے تبادلہ میں اُس کو ملی اور تیل کی قیمت فروخت فی گیلن شلنگوں میں تینوں ایک نزولی سلسلۂ ہندسیہ میں ہیں۔ نیز اُس نے یہ محسوب کیا کہ اگر اُسے ایک ہنڈرڈ ویٹ کپاس اور ملتی اور ہر ہنڈرڈ ویٹ کپاس کے تبادلہ میں ایک گیلن تیل زیادہ ملتا اور ہر گیلن تیل کی قیمت فروخت ایک شلنگ زیادہ ہوتی تو اُس کو کل ۵۰۸ پونڈ ۹ شلنگ زیادہ ملتے۔ لیکن اگر اُس کو ایک ہنڈرڈ ویٹ کپاس کم ملتی اور ہر ہنڈرڈ ویٹ کپاس پر ایک گیلن تیل کم ملتا اور ہر گیلن پر ایک شلنگ

قیمت کم ملتی تو اُسے ۴۸۳ پونڈ ۱۳ شلنگ کم ملتے - بتاؤ کہ اُسے فی الحقیقت کتنی رقم ملتی -

۱۷۵ — ثابت کرو کہ $\sum$ (ب + ج - ا - لا)^{4} (ب - ج) (ا - لا) =

۱۶ (ب - ج) (ج - ا) (ا - ب) (لا - ا) (لا - ب) (لا - ج)

(جیسس کالج - کیمبرج)

۱۷۶ — اگر عہ، بہ، جہ مساوات لا^{3} - ف لا^{2} + ر = ۰ کی اصلیں ہوں تو وہ مساوات معلوم کرو جسکی اصلیں (بہ + جہ)/عہ ، (جہ + عہ)/بہ ، (عہ + بہ)/جہ ہوں -

(آر - ایم - اے - وولچ)

۱۷۷ — اگر ا^{2} + ب^{2} کی شکل کے اجزائے ضربی کی کسی تعداد کو باہم ضرب دیا جائے تو ثابت کرو کہ حاصل ضرب دو مربعوں کے حاصل جمع کی شکل میں بیان ہوسکتا ہے

اگر یہ معلوم ہو کہ (ا^{2} + ب^{2}) (ج^{2} + د^{2}) (ع^{2} + ف^{2}) (گ^{2} + ھ^{2}) = ل^{2} + م^{2}

تو ل اور م کی قیمت ا، ب، ج، د، ع، ف، گ، ھ کی رقوم میں معلوم کرو-

(لنڈن یونیورسٹی)

۱۷۸ — مساواتوں لا^{2} + ما^{2} = ۶۱ ، لا^{3} - ما^{3} = ۹۱ کو حل کرو -

(آر، ایم، اے- وولچ)

۱۷۹ — ایک آدمی ایک امتحان میں شریک ہوتا ہے جس میں ۴ پرچے ہیں اور ہر پرچے کے زیادہ سے زیادہ نشان م ہیں - ثابت کرو کہ کل ۲ م نشان حاصل کرنے کے مختلف طریقوں کی تعداد $\frac{1}{3}$ (م + ۱) (۲ م^{2} + ۴ م + ۳) ہے-

(ریاضی ٹرائی پاس)

۱۸۰ — اگر عہ، بہ مساوات لا^{2} + ف لا + ۱ = ۰ کی اصلیں ہوں اور جہ، لہ مساوات لا^{2} + ق لا + ۱ = ۰ کی اصلیں ہوں تو ثابت کرو کہ (عہ - جہ) (بہ - جہ) (عہ + لہ) (بہ + لہ) = ق^{2} - ف^{2}

(آر، ایم، اے- وولچ)

۱۸۱ — ثابت کرو کہ اگر (۱ + لا)^ن کی تفصیل میں لا^ا کا سر ا_م ہو تو خواہ ن کی کچھ ہی قیمت ہو ا_۰ - ا_۱ + ا_۲ - ...... + (-۱)^{م-۱} ا_{م-۱}

$$= \frac{(ن - ۱)(ن - ۲) \ldots (ن - م + ۱)}{\lfloor م - ۱} (-۱)^{م-۱}$$

(نیو کالج اکسفورڈ)

۱۸۲ — ایک عدد تین مفرد اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کے مساوی ہے، اِن اجزائے ضربی کے مربعوں کا حاصل جمع ۲۳۳۱ ہے۔ (بشمول ایک) ۷۵۶۰ عدد ایسے ہیں جو اس عدد سے کم ہیں اور بلحاظ اس کے مفرد ہیں، جن عددوں پر یہ عدد تقسیم ہو سکتا ہے (بشمول ۱ اور خود عددِ مذکور) اُن کی تعداد ۱۰۵۶۰ ہے۔ اِس عدد کو معلوم کرو۔

(کارپس کالج، کیمبرج)

۱۸۳ — ایک مساوات ایسی بناؤ جبکی اصلیں مساوات

$$لا^۳ - ا لا^۲ + ب لا + ج = ۰$$

کی اصلوں میں سے دو دو کے حاصل ضرب کے مساوی ہوں۔

نیز مساوات ۲ لا^۵ + لا^۴ + لا + ۲ = ۱۲ لا^۳ + ۱۲ لا^۲ کو مکمل طور پر حل کرو۔

(آر، ایم، اے، وولچ)

۱۸۴ — ثابت کرو کہ اگر ن کوئی مثبت صحیح عدد ہو تو

$$ن^ن - ن(ن - ۲)^ن + \frac{ن(ن - ۱)}{\lfloor ۲}(ن - ۴)^ن - \ldots\ldots = ۲^ن \lfloor ن$$

۱۸۵ — اگر $(۶\sqrt{۶} + ۱۴)^{۲ن+۱} =$ ع اور اگر ع کے کسری حصہ کو ک سے تعبیر کیا جائے تو ع ک = ۲۰^{۲ن+۱}

۱۸۶ — ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

(۱) لا + ما + ی = ۲ ، لا^۲ + ما^۲ + ی^۲ = ۰ ، لا^۳ + ما^۳ + ی^۳ = -۱

(۲) لا^۲ - (ما - ی)^۲ = ا^۲ ، ما^۲ - (ی - لا)^۲ = ب^۲ ، ی^۲ - (لا - ما)^۲ = ج^۲

(کرائیسٹ کالج۔ کیمبرج)

۱۸۷۔ انگلستان کے ایک عام انتخاب میں جدت پسندوں کی تعداد انگریزی قدامت پسندوں کی تعداد سے ۱۵ زیادہ تھی اور قدامت پسندوں کی کل تعداد انگریزی جدت پسندوں کی تعداد کے دو گنے سے بقدر ۵ زیادہ تھی۔ اسکاٹ لینڈ کے قدامت پسندوں کی تعداد ویلز کے جدت پسندوں کی تعداد کے مساوی تھی، اسکاٹ لینڈ کے جدت پسندوں کی کثرت ویلز کے قدامت پسندوں کی تعداد سے دُگنی تھی اور اول الذکر کی نسبت آئرلینڈ کی جدت پسند کثرت کے ساتھ ۲ : ۳ تھی۔ انگریزی قدامت پسندوں کی کثرت آئرلینڈ کے کل ممبروں کی تعداد سے بقدر ۱۰ زیادہ تھی۔ کُل ممبروں کی تعداد ۶۵۲ تھی جن میں سے ۶۰ سکاٹ لینڈ نے بھیجے۔ انگلستان، سکاٹ لینڈ، آئرلینڈ اور ویلز میں سے ہر ایک کی ہر پارٹی کے ممبروں کی تعداد معلوم کرو۔

۱۸۸۔ ثابت کرو کہ $ا^{۵}(ج-ب)+ب^{۵}(ا-ج)+ج^{۵}(ب-ا)$

$$=(ب-ج)(ج-ا)(ا-ب)(\sum ا^{۳}+\sum ا^{۲}ب+اب ج)$$

۱۸۹۔ ثابت کرو کہ

$$\begin{vmatrix} ا^{۳} & ۳ا^{۲} & ۳ا & ۱ \\ ا^{۲} & ا^{۲}+۲ا & ۲ا+۱ & ۱ \\ ا & ۲ا+۱ & ا+۲ & ۱ \\ ۱ & ۳ & ۳ & ۱ \end{vmatrix} = (ا-۱)^{۶}$$

[بال کالج۔ آکسفورڈ]

۱۹۰۔ اگر $\frac{۱}{ا}+\frac{۱}{ج}+\frac{۱}{ا-ب}+\frac{۱}{ج-ب}=۰$ تو

ثابت کرو کہ ا، ب، ج سلسلۂ موسیقیہ میں ہونگے سوائے اِس صورت کے کہ $ب = ا + ج$

ٹرنٹی کالج۔ کیمبرج

۱۹۱۔ معادلاتِ ذیل کو حل کرو۔

(۱) $لا^{۳}-۱۳لا^{۲}+۱۵لا+۱۸۹=۰$ یہ معلوم ہے کہ ایک اصل دُوسری

اصل سے بقدر ۲ کے زیادہ ہے۔

(۲) لا^{۴} − ۴ لا^{۲} + ۸ لا + ۳۵ = ۰ معلوم ہے کہ ایک اصل ۲ + $\sqrt{-۳}$ ہے۔
(آر، ایم، اے وولیچ)

۱۹۲ــــ دو عدد ا اور ب معلوم ہیں، اِن سے دو اَور عدد ا$_{۱}$ اور ب$_{۱}$ روابط

۳ ا$_{۱}$ = ۲ ا + ب اور ۳ ب$_{۱}$ = ا + ۲ ب کے ذریعے بنائے گئے ہیں ا$_{۱}$ اور

ب$_{۱}$ سے اسی طرح دو اَور عدد ا$_{۲}$ ب$_{۲}$ بنائے گئے ہیں اور علیٰ ہٰذا القیاس ا$_{ن}$، ب$_{ن}$

کی قیمتیں ا اور ب کی رقوم میں معلوم کرو اور ثابت کرو کہ اگر ن لاتتناہی ہو تو

ا$_{ن}$ = ب$_{ن}$

۱۹۳ــــ اگر لا + ما + ی + ھ = ۰ تو ثابت کرو کہ

ھ لا (ھ + لا)^{۲} + ما ی (ھ − لا)^{۲} + ھ ما (ھ + ما)^{۲} + ی لا (ھ − ما)^{۲}

+ ھ ی (ھ + ی)^{۲} + لا ما (ھ − ی)^{۲} + ۴ لا ما ی ھ = ۰
(ریاضی ٹرائی پاس)

۱۹۴ــــ اگر ا + $\frac{\text{ب ج} - \text{ا}^{۲}}{\text{ا}^{۲} + \text{ب}^{۲} + \text{ج}^{۲}}$ کی قیمت میں حروف ا، ب، ج کے کسی ایک زوج کے حروف کو باہم بدل دینے سے کوئی فرق نہ آئے تو کسی اَور زوج کے حروف کو باہم بدلنے سے بھی اس میں کوئی فرق نہ آئے گا۔ نیز اس کی قیمت صفر ہو جائے گی اگر ا + ب + ج = ۱ (جہاں ا ≠ ب ≠ ج) (ریاضی ٹرائی پاس)

۱۹۵ــــ دو مقامات ا اور ب کے درمیان ریل گاڑی کی چار سڑکیں ہیں۔ دو ریل گاڑیاں ا سے ب کی طرف ۶ بجے اور ۶ بجکر ۴۵ منٹ پر روانہ ہوتی ہیں اور دو گاڑیاں ب سے ا کی طرف بالترتیب ۷ بجکر ۱۵ منٹ اور ۸$\frac{۱}{۲}$ بجے روانہ ہوتی ہیں۔ اگر یہ چاروں ریل گاڑیاں (جبکہ اُن کو نقطے تصور کیا جائے) ایک ہی وقت میں ایک دوسرے کے پاس سے گزریں اور اُن کی رفتاریں بالترتیب لا$_{۱}$، لا$_{۲}$، لا$_{۳}$، لا$_{۴}$ میل فی گھنٹہ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{۳\,لا_۲}{لا_۲ - لا_۱} = \frac{۴م + ۵\,لا_۳}{لا_۱ + لا_۳} = \frac{۴م + ۱۰\,لا_۴}{لا_۱ + لا_۴}$$

جہاں ا ب کا درمیانی فاصلہ میلوں میں م سے تعبیر ہوتا ہے۔

(ٹرنٹی کالج۔کیمبرج)

۱۹۶ — ثابت کرو کہ اگر تیسرے اور تیسرے سے زیادہ درجہ کی رقموں کو نظر انداز کر دیا جائے تو

$$\frac{(۱-لا)^{-\frac{۱}{۲}} + (۱-ما)^{-\frac{۱}{۲}}}{۱ + \sqrt{(۱-لا)(۱-ما)}} = ۱ + \frac{۱}{۴}(لا + ما) + \frac{۱}{۸}(۳\,لا^۲ + لا\,ما + ۳\,ما^۲)$$

(ٹرنٹی کالج۔کیمبرج)

۱۹۷ — ثابت کرو کہ سلسلہ ا، ا - ب، ا - ۲ ب، ....، ا - (ن - ۱) ب کی دو دو رقموں کے حاصل ضربوں کا حاصل جمع صفر ہو جاتا ہے اگر ن، ۳ م^۲ - ۱ کی شکل کا ہو اور ۲ ا = (۳ م - ۲) (م + ۱) ب

۱۹۸ — اگر ن جفت ہو اور درمیان کی رقموں کا زوج عہ + بہ اور عہ - بہ ہو تو ثابت کرو کہ ایک سلسلہ حسابیہ کے مکعبوں کا حاصل جمع ن عہ$\{$عہ^۲ + (ن^۲ - ۱) بہ$^۲\}$ ہے۔

۱۹۹ — اگر ا، ب، ج حقیقی مثبت مقادیر ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{۱}{ا} + \frac{۱}{ب} + \frac{۱}{ج} < \frac{ا^۸ + ب^۸ + ج^۸}{ا^۳\,ب^۳\,ج^۳}$$

(ٹرنٹی کالج۔کیمبرج)

۲۰۰ — ا، ب اور ج ایک ہی وقت ایک شہر کی طرف جو ف میل فاصلہ پر واقع ہے روانہ ہوتے ہیں، ا، ل میل فی گھنٹہ کی یکساں رفتار سے پیدل چلنا شروع کرتا ہے اور ب اور ج، م میل فی گھنٹہ کی یکساں رفتار سے گاڑی پر سفر کرتے ہیں، کچھ دیر کے بعد ب گاڑی سے اُتر کر ا کی رفتار سے پیدل چلنا شروع کر دیتا ہے اور ج، ا کو گاڑی میں ساتھ بٹھانے کے لئے واپس آتا ہے، پھر ا اور ج گاڑی پر بیٹھ کر عین اُسی وقت شہر مذکور میں پہنچتے ہیں جس وقت ب پہنچتا ہے ثابت کرو کہ کل وقت $\frac{ف}{م} \times \frac{۳م + ل}{۳ل + م}$ گھنٹوں کے مساوی ہے۔

(پیٹر ہاؤس ۔ کیمبرج)

۲۰۱ ـــ ایک شہر کے بازار شطرنج کے نقشہ کی شکل میں بنائے گئے ہیں ۔ م بازاروں کا رُخ شمالاً جنوباً ہے اور ن کا شرقاً غرباً ۔ ایک آدمی شمال مغربی کونہ سے جنوب مشرقی کونہ تک چھوٹے سے چھوٹا فاصلہ طے کرکے جانا چاہتا ہے ، بتاؤ کہ وہ کتنے مختلف راستوں سے جا سکتا ہے ۔　（ آکسفورڈ موڈز ）

۲۰۲ ـــ مساوات $\sqrt[4]{\text{لا} + ۲۷} + \sqrt[4]{۵۵ - \text{لا}} = ۴$ کو حل کرو ۔

۲۰۳ ـــ ثابت کرو کہ سلسلہ

اب + (ا + لا)(ب + لا) + (ا + ۲لا)(ب + ۲لا) + …… ۲ن رقموں تک میں آخر کی ن رقموں کے حاصل جمع اور پہلی ن رقموں کے حاصل جمع کے فرق اور آخری رقم اور پہلی رقم کے فرق کی نسبت $\text{ن}^{۲} : ۲\text{ن} - ۱$ ہے ۔

۲۰۴ ـــ ذیل کے سلسلوں کے ن ویں مستدق معلوم کرو :-

(۱) $\frac{۱}{۲+}\ \frac{۱}{۲+}\ \frac{۱}{۲+}\ \frac{۱}{۲+}$ ……

(۲) $\frac{۴}{۳+}\ \frac{۴}{۳+}\ \frac{۴}{۳+}$ ……

۲۰۵ ـــ ثابت کرو کہ $(\text{ا} - \text{لا})^{۴}(\text{ما} - \text{ی})^{۴} + (\text{ا} - \text{ما})^{۴}(\text{ی} - \text{لا})^{۴} + (\text{ا} - \text{ی})^{۴}(\text{لا} - \text{ما})^{۴}$

$= ۲\{(\text{ا} - \text{ما})^{۲}(\text{ا} - \text{ی})^{۲}(\text{لا} - \text{ما})^{۲}(\text{لا} - \text{ی})^{۲} + (\text{ا} - \text{ی})^{۲}(\text{ا} - \text{لا})^{۲}(\text{ما} - \text{ی})^{۲}(\text{ما} - \text{لا})^{۲}$

$+ (\text{ا} - \text{لا})^{۲}(\text{ا} - \text{ما})^{۲}(\text{ی} - \text{لا})^{۲}(\text{ی} - \text{ما})^{۲}\}$　(پیٹر ہاؤس ۔ کیمبرج)

۲۰۶ ـــ اگر ع ، ب ، ج مساوات $\text{لا}^{۳} + \text{ق}\,\text{لا} + \text{ر} = ۰$ کی اصلیں ہوں تو $\frac{\text{م ع} + \text{ن}}{\text{م ع} - \text{ن}} + \frac{\text{م ب} + \text{ن}}{\text{م ب} - \text{ن}} + \frac{\text{م ج} + \text{ن}}{\text{م ج} - \text{ن}}$ کی قیمت م ، ن ، ق ، ر کی رقوم میں معلوم کرو ۔

۲۰۷ — انگلستان میں ہر ۴۶ آدمیوں میں سے ایک آدمی سالانہ مرتا ہے اور ہر ۳۳ آدمیوں پر ایک آدمی سالانہ پیدا ہوتا ہے، اگر ترک وطن کا سلسلہ بند ہو جائے تو بتاؤ اسی شرح سے کتنے عرصہ میں آبادی دگنی ہو جائے گی معلوم ہے

لوک ۲ = ۰٫۳۰۱۰۳۰۰ ، لوک ۱۵۳۱ = ۳٫۱۸۴۹۷۵۲ ،

لوک ۱۵۱۸ = ۳٫۱۸۱۲۷۱۸

۲۰۸ — اگر $(\text{۱} + \text{لا} + \text{لا}^{\text{۲}})^{\text{ن}} = \text{ا}_{\text{۰}} + \text{ا}_{\text{۱}}\,\text{لا} + \text{ا}_{\text{۲}}\,\text{لا}^{\text{۲}} + \dots\dots$ تو ثابت کرو کہ

$$\text{ا}_{\text{ر}} - \text{ن}\,\text{ا}_{\text{ر-۱}} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-\text{۱})}{\text{۱}\times\text{۲}}\,\text{ا}_{\text{ر-۲}} - \dots\dots + (-\text{۱})^{\text{ر}}\,\frac{|\underline{\text{ن}}}{|\underline{\text{ر}}\;|\underline{\text{ن-ر}}}\,\text{ا}_{\text{۰}} = \text{۰}$$

بشرطیکہ ر، ۳ کا ضعف نہ ہو۔ موخر الذکر صورت میں اس کی کیا قیمت ہوگی۔

(سینٹ جونز کالج کیمبرج)

۲۰۹ — ایک جماعت میں پول، ترک، یونانی، جرمن اور اٹلی کے لوگ شامل ہیں — پول جرمنوں کی ایک تہائی سے بقدر ایک کے کم ہیں اور اٹلی والوں کی تعداد کے نصف سے تین کم ہیں۔ ترک اور جرمن، یونانیوں اور اٹلی والوں سے ۳ زیادہ ہیں۔ جرمن اور یونانی کل جماعت کے نصف سے ایک کم ہیں۔ اٹلی والے اور یونانی کل جماعت کے $\frac{\text{۳}}{\text{۷}}$ کے مساوی ہیں۔ ہر قوم کے لوگوں کی تعداد معلوم کرو۔

۲۱۰ — ایک سلسلہ کی ن ویں رقم $(\text{ن} + \text{۱})\,\text{ن}^{-\text{۱}}(\text{ن} + \text{۲})^{-\text{۱}}(-\text{لا})^{\text{ن+۱}}$ ہے، اس سلسلہ کا حاصل جمع لاانتہا ہی تک معلوم کرو۔

(آکسفورڈ موڈز)

۲۱۱ — اگر ن کوئی مثبت صحیح عدد ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{ن} - \frac{\text{ن}(\text{ن}^{\text{۲}}-\text{۱})}{|\underline{\text{۲}}} + \frac{\text{ن}(\text{ن}^{\text{۲}}-\text{۱}^{\text{۲}})(\text{ن}^{\text{۲}}-\text{۲}^{\text{۲}})}{|\underline{\text{۲}}\;|\underline{\text{۳}}}$$

$$+ (-\text{۱})^{\text{ر}}\,\frac{\text{ن}(\text{ن}^{\text{۲}}-\text{۱}^{\text{۲}})(\text{ن}^{\text{۲}}-\text{۲}^{\text{۲}})\dots\dots(\text{ن}^{\text{۲}}-\text{ر}^{\text{۲}})}{|\underline{\text{ر}}\;|\underline{\text{ر+۱}}} + \dots\dots = (-\text{۱})^{\text{ن+۱}}$$

(پمبرک کالج - کیمبرج)

۲۱۲ — ذیل کے سلسلوں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

(۱) ۶، ۲۴، ۶۰، ۱۲۰، ۲۱۰، ۳۳۶، ...... ن رقموں تک

(۲) ۴ − ۹ لا + ۱۶ لا^{۲} − ۲۵ لا^{۳} + ۳۶ لا^{۴} − ۴۹ لا^{۵} + ... لاتناہی تک

(۳) $\frac{۳ \times ۱}{۲} + \frac{۵ \times ۳}{۲^{۲}} + \frac{۷ \times ۵}{۲^{۳}} + \frac{۹ \times ۷}{۲^{۴}} + ...$ تالاتناہی

۲۱۳ — مساوات

$$\begin{vmatrix} ۴\text{لا} & ۶\text{لا}+۲ & ۸\text{لا}+۱ \\ ۶\text{لا}+۲ & ۹\text{لا}+۳ & ۱۲\text{لا} \\ ۸\text{لا}+۱ & ۱۲\text{لا} & ۱۶\text{لا}+۲ \end{vmatrix} = ۰$$

کو حل کرو

(کنگز کالج، کیمبرج)

۲۱۴ — ثابت کرو کہ

(۱) ا^{۲}(۱ + ب^{۲}) + ب^{۲}(۱ + ج^{۲}) + ج^{۲}(۱ + ا^{۲}) > ۶ ا ب ج

(۲) ن (ا$^{ف+ق}$ + ب$^{ف+ق}$ + ج$^{ف+ق}$ + ...) > (ا^{ف} + ب^{ف} + ج^{ف} + ...)
× (ا^{ق} + ب^{ق} + ج^{ق} + ...) جہاں مقادیر ا، ب، ج، .... کی تعداد ن ہو

۲۱۵ — مساوات

$$\left\{\begin{aligned} \text{ما ی} &= \text{ا}(\text{ما} + \text{ی}) + \text{ع} \\ \text{ی لا} &= \text{ا}(\text{ی} + \text{لا}) + \text{ب} \\ \text{لا ما} &= \text{ا}(\text{لا} + \text{ما}) + \text{ج} \end{aligned}\right.$$

کو حل کرو

(ٹرنٹی کالج۔ کیمبرج)

۲۱۶ — اگر ن کوئی عدد مفرد ہو تو ثابت کرو کہ جملہ

۱ (۲$^{ن-۱}$ + ۱) + ۲ (۳$^{ن-۱}$ + $\frac{۱}{۲}$) + ۳ (۴$^{ن-۱}$ + $\frac{۱}{۳}$) + ...

+ (ن − ۱) (ن$^{ن-۱}$ + $\frac{۱}{ن-۱}$)، ن پر پورا تقسیم ہو سکتا ہے۔

(کوئینز کالج، کیمبرج)

۲۱۷ — نشانہ بازی کے ایک مقابلہ میں ایک آدمی ہر نشانہ میں ۵، ۴،

۳ ، ۲ یا ۰ نمبر حاصل کرسکتا ہے - بتاؤ کہ وہ کتنے مختلف طریقوں سے ، نشانوں میں ۳۰ نمبر حاصل کرسکتا ہے -
(پمبروک کالج - کیمبرج)

۲۱۸ — ثابت کرو کہ جملہ $\text{لا}^{۵} - \text{ب}\,\text{لا}^{۳} + \text{ج}\,\text{لا}^{۲} + \text{د}\,\text{لا} - \text{ع}$ ، ایک کامل مربع اور ایک کامل مکعب کے حاصل ضرب کے مساوی ہوگا اگر

$$\frac{۱۲\,\text{ب}}{۵} = \frac{۹\,\text{د}}{\text{ب}} = \frac{۵\,\text{ع}}{\text{ج}} = \frac{\text{د}^{۲}}{\text{ج}^{۲}}$$

۲۱۹ — ایک تھیلی میں ۶ سیاہ گیند ہیں اور باقی سفید گیند ہیں جن کی تعداد چھ سے کم ہے - تین گیند یکے بعد دیگرے نکالے گئے ہیں اور واپس نہیں رکھے گئے ، یہ گیند سب کے سب سفید ہیں ، ثابت کرو کہ اس کے بعد سیاہ گیند نکلنے کا قرینہ $\frac{۶۷۷}{۹۰۹}$ ہے -
(جیسس کالج - کیمبرج)

۲۲۰ — ثابت کرو کہ پہلے ن صحیح عددوں کے مربعوں میں سے دو دو کے حاصل ضربوں کا مجموعہ $\frac{۱}{۳۶۰}\,\text{ن}(\text{ن}^{۲}-۱)(۴\,\text{ن}^{۲}-۱)(۵\,\text{ن}+۶)$ ہے -
(کیئس کالج - کیمبرج)

۲۲۱ — اگر $\frac{\text{عہ}^{۲}(\text{ب}-\text{ج})}{\text{لا}-\text{ا}} + \frac{\text{بہ}^{۲}(\text{ج}-\text{ا})}{\text{لا}-\text{ب}} + \frac{\text{جہ}^{۲}(\text{ا}-\text{ب})}{\text{لا}-\text{ج}} = ۰$

کی اصلیں مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\text{عہ}(\text{ب}-\text{ج}) \pm \text{بہ}(\text{ج}-\text{ا}) \pm \text{جہ}(\text{ا}-\text{ب}) = ۰$$

۲۲۲ — ثابت کرو کہ اگر ن کوئی مثبت صحیح عدد ہو تو

$$\text{ن} = ۲^{\text{ن}-۱} - \frac{\text{ن}-۲}{۱} \times ۲^{\text{ن}-۳} + \frac{(\text{ن}-۳)(\text{ن}-۴)}{\underline{|۲}}\,۲^{\text{ن}-۵}$$

$$- \frac{(\text{ن}-۴)(\text{ن}-۵)(\text{ن}-۶)}{\underline{|۳}}\,۲^{\text{ن}-۷} + \ldots\ldots$$

(کلئیر کالج - کیمبرج)

۲۲۳ — ذیل کی مساواتوں کو حل کرو:

(۱) $لا^۲ + ۲\ ما\ ی = ما^۲ + ۲\ ی\ لا = ی^۲ + ۲\ لا\ ما + ۳ = ۷۶$

(۲) $لا + ما + ی = ا + ب + ج$

$\frac{لا}{ا} + \frac{ما}{ب} + \frac{ی}{ج} = ۳$

$ا\ لا + ب\ ما + ج\ ی = ب\ ج + ج\ ا + ا\ ب$

(کرائسٹ کالج۔ کیمبرج)

۲۲۴ — ایک خطِ مستقیم پر م نقطے ہیں، ان نقطوں میں سے ہر ایک نقطہ کو ایک دوسرے خطِ مستقیم پر کے ن نقطوں میں سے ہر ایک نقطہ کے ساتھ وصل کر دیا گیا ہے، ثابت کرو کہ نقاطِ مذکورہ کے علاوہ خطوطِ واصل ایک دوسرے کو $\frac{۱}{۴}$ م ن (م − ۱)(ن − ۱) نقطوں پر قطع کرتے ہیں۔ (ریاضی ٹرائی پاس)

۲۲۵ — اگر یہ معلوم ہو کہ $ما = لا + لا^۲ + لا^۵$ تو لا کو اس شکل

$ما + ا\ ما^۲ + ب\ ما^۳ + ج\ ما^۴ + د\ ما^۵ + \ldots\ldots$

میں پھیلاؤ اور ثابت کرو کہ $ا^۲\ د - ۳\ ا\ ب\ ج + ۲\ ب^۳ = -۱$

(بیلیل کالج۔ آکسفورڈ)

۲۲۶ — ایک شخص نے تین مساوی رقمیں گھوڑے، گائے اور بکریاں خریدنے میں صرف کیں، ایک گھوڑے کی قیمت ایک گائے کی قیمت سے ایک پونڈ زیادہ ہے اور ایک بکری کی قیمت سے دو پونڈ زیادہ ہے اُس نے کل ۴۷ جانور خریدے۔ گایوں کی تعداد گھوڑوں کی تعداد سے اتنی زیادہ ہے جتنی کہ ۹ پونڈ میں بکریاں خریدی جا سکتی تھیں۔ بتاؤ کہ ہر ایک قسم کے کتنے جانور خریدے گئے۔

۲۲۷ — لوگ ۲ کو لا متناہی کسر مسلسل

$\frac{۱}{۱+}\ \frac{۱}{۱+}\ \frac{۲^۲}{۱+}\ \frac{۳^۲}{۱+} \ldots\ldots \frac{ن^۲}{۱+} \ldots\ldots$

کی شکل میں بیان کرو۔

(آئیلر)

۲۲۸ — ایک امتحان میں ۶ پرچے دیے گئے اور ہر ایک کے زیادہ سے

زیادہ نشانات ۱۰۰ مقرر کیے گئے ، ثابت کرو کہ جن مختلف طریقوں سے ایک طالب علم کل نشانات کا ۴۰ فیصدی حاصل کر سکتا ہے اُن کی تعداد

$$\frac{1}{5}\left\{\frac{\lfloor 245}{\lfloor 240} \times 6 - \frac{\lfloor 144}{\lfloor 139} \times 15 + \frac{\lfloor 43}{\lfloor 38}\right\} \text{ ہے۔}$$

(آکسفورڈ موڈز)

۲۲۹ — سلسلہ

$$\frac{لا}{2} + \frac{لا^3}{6} \times \frac{3\times1}{4\times2} + \frac{لا^5}{10} \times \frac{7\times5\times3\times1}{8\times6\times4\times2} + \frac{لا^7}{14}\,\frac{11\times9\times7\times5\times3\times1}{12\times10\times8\times6\times4\times2} + \dots\dots\dots$$

کے استدقاق کی جانچ کرو۔

۲۳۰ — سلسلۂ متوالی ۱ + ۶ + ۴۰ + ۲۸۸ + ... کا پیمانۂ ربط، ن ویں رقم اور ن رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

نیز ثابت کرو کہ اگر ایک ایسا سلسلہ بنایا جائے جس کی ر ویں رقم سلسلۂ بالا کی ر رقموں کے حاصل جمع کے مساوی ہو تو موخرالذکر سلسلہ کی ن رقموں کا حاصل جمع

$$\frac{2}{3}\left(3^{2ن}-1\right) + \frac{4}{27}\left(2^{3ن}-1\right) - \frac{5ن}{21}$$

(کیئس کالج - کیمبرج)

۲۳۱ — یہ معلوم ہے کہ کسی خاص مقام پر دوپہر کے وقت ہر تین دنوں میں سے بالاوسط دو دن سورج بادلوں کی وجہ سے غائب رہتا ہے، بتاؤ کہ کسی ۵ مخصوص ایام مستقبل میں سے کم از کم چار دن دوپہر کے وقت سورج کے چمکنے کا کیا امکان ہے۔

(کوئینز کالج - کیمبرج)

۲۳۲ — ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

$$\left\{\begin{aligned} لا^2 + (ا - ی)^2 &= ا^2 \\ ا^2 + (ی - لا)^2 &= ب^2 \\ ی^2 + (لا - ا)^2 &= ج^2 \end{aligned}\right.$$

(ایمنول کالج - کیمبرج)

۲۳۳ — ذیل کی مساواتوں میں سے لا، ما، ی کو ساقط کرو۔

$$\frac{لا^2 - لا\,ما - لا\,ی}{ا} = \frac{ما^2 - ما\,ی - لا\,ما}{ب} = \frac{ی^2 - لا\,ی - ما\,ی}{ج}$$

اور $ا\,لا + ب\,ما + ج\,ی = ۰$

(ریاضی ٹرائی پاس)

۲۳۴ — اگر مساوات $لا^3 + ف\,لا^2 + ق\,لا + ر = ۰$ کی دو اصلیں مساوی اور مختلف العلامت ہوں تو ثابت کرو کہ $ف\,ق = ر$

(کوئینز کالج - کیمبرج)

۲۳۵ — سلاسلِ ذیل کو جمع کرو:

$$(۱)\quad ۱ + ۲^3 لا + ۳^3 لا^2 + \ldots\ldots + ن^3 لا^{ن-۱}$$

$$(۲)\quad \frac{۲۵}{۱^2 \times ۲^3 \times ۳^3} + \frac{۵۲}{۲^2 \times ۳^3 \times ۴^3} + \ldots\ldots + \frac{۵ن^2 + ۱۲ن + ۸}{ن^2 (ن+۱)^3 (ن+۲)^3}$$

(ایمینول کالج - کیمبرج)

۲۳۶ — اگر $(۱ + ا^3 لا^4)(۱ + ا^5 لا^8)(۱ + ا^9 لا^{16})(۱ + ا^{17} لا^{32}) \ldots\ldots$

$$= ۱ + ا_4 لا^4 + ا_8 لا^8 + ا_{12} لا^{12} + \ldots\ldots$$

تو ثابت کرو کہ $ا_{8ن+4} = ا^3 ا_{8ن}$ اور $ا_{8ن} = ا^{2ن} ا_{4ن}$، نیز تفصیل کی پہلی دس رقمیں معلوم کرو۔

(کارپس کالج کیمبرج)

۲۳۷ — پانی کے ایک مخزن میں ا سے ب تک کوئی رَو نہیں ہے لیکن ب سے ج تک رَو ہے۔ ایک آدمی رَو کے موافق ا سے ج تک ۳ گھنٹوں میں کشتی لیجا سکتا ہے اور ج سے ا تک رَو کے مخالف $۳\frac{۱}{۲}$ گھنٹے میں، اگر تمام راستہ میں وہی رَو ہوتی جو ب سے ج تک ہے تو اُس کو رَو کے موافق جانے میں $۲\frac{۳}{۴}$ گھنٹے لگتے، بتاؤ کہ موخرالذکر حالات میں اُس کو واپسی میں کتنا

وقت لگتا۔

۲۳۸ — ثابت کرو کہ کسر مسلسل $\frac{3}{+2}\ \frac{3}{+2}\ \frac{3}{+2}$ .... کا ن واں ستدق

$$\frac{3^{ن+1} + 3(-1)^{ن+1}}{3^{ن+1} - (-1)^{ن+1}}$$ ہے (ایمینول کالج۔کیمبرج)

۲۳۹ — اگر مساوات $لا^ن + ف_1 لا^{ن-1} + ف_2 لا^{ن-2} + \ldots + ف_ن$ $=$ فا (لا) = ۰ کے تمام سر صحیح عدد ہوں اور اگر فا (۰) اور فا (۱) دونوں طاق عدد ہوں تو ثابت کرو کہ مساوات کی کوئی متوافق اصل نہیں ہے۔

(لنڈن یونیورسٹی)

۲۴۰ — ثابت کرو کہ مساوات $\sqrt{ا لا + ء} + \sqrt{ب لا + ہ} + \sqrt{ج لا + چ} = ۰$

اختصار کے بعد ایک سادہ مساوات بن جاتی ہے اگر $\sqrt{ا} \pm \sqrt{ب} \pm \sqrt{ج} = ۰$

مساوات $\sqrt{6 لا^2 - 15 لا - 7} + \sqrt{4 لا^2 - 8 لا - 11} - \sqrt{2 لا^2 - 5 لا + 5}$

$= 2 لا - 3$ کو حل کرو۔

۲۴۱ — ایک تھیلی میں ۳ سُرخ اور ۳ سبز گیند ہیں اور اُن میں سے ایک آدمی ۳ گیند علی الحساب نکالتا ہے۔ تب وہ تھیلی میں ۳ نیلے گیند ڈال دیتا ہے اور پھر علی الحساب تین نکال لیتا ہے۔ ثابت کرو کہ آخر کے تینوں گیندوں کے مختلف رنگوں کے ہونے کے خلاف جیتنے کے لئے عین ۸ : ۴ کی شرط لگا سکتا ہے۔

(پمبرک کالج۔کیمبرج)

۲۴۲ — مساوات $لا^3 - 7 لا^2 + 4 لا - 3 = ۰$ کی اصلوں کی پانچویں قوتوں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

(لنڈن یونیورسٹی)

۲۴۳ — ایک سلسلۂ ہندسیہ اور ایک سلسلۂ موسیقیہ دونوں کی ف ویں رقم ا، ق ویں ب اور ر ویں رقم ج کے مساوی ہے۔ ثابت کرو کہ

$ا(ب - ج)$ لوگ $ا + ب(ج - ا)$ لوگ $ب + ج(ا - ب)$ لوگ $ج = ۰$

(کرائیسٹ کالج - کیمبرج)

۲۴۴ — چار اعداد ایسے معلوم کرو کہ پہلے، تیسرے اور چوتھے کا حاصل جمع دوسرے سے بقدر ۸ کے بڑا ہو۔ پہلے اور دوسرے کے مربعوں کا حاصل جمع تیسرے اور چوتھے کے مربعوں کے حاصل جمع سے بقدر ۳۶ کے بڑا ہو، پہلے اور دوسرے کے حاصل ضرب اور تیسرے اور چوتھے کے حاصل ضرب کا مجموعہ ۴۲ ہو اور نیز پہلے عدد کا مکعب دوسرے، تیسرے اور چوتھے عددوں کے مکعبوں کے حاصل جمع کے مساوی ہو۔

۲۴۵ — ایک متوالی سلسلۂ ربط $ل_{ن+۲} = ا\,ل_{ن+۱} - ب\,ل_{ن}$ سے مربوط ہے جہاں اس کی تین متصل رقمیں $ل_{ن}$، $ل_{ن+۱}$، $ل_{ن+۲}$ ہیں ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{ب^{ن}}\left\{ ل^{2}_{ن+۱} - ا\,ل_{ن}\,ل_{ن+۱} + ب\,ل^{2}_{ن} \right\} = \text{مستقل}$$

۲۴۶ — معادلات ذیل میں سے لا، ما، ی کو ساقط کرو:-

$$\frac{1}{لا} + \frac{1}{ما} + \frac{1}{ی} = \frac{1}{ا} \qquad لا^{2} + ما^{2} + ی^{2} = ب^{2}$$

$$لا^{3} + ما^{3} + ی^{3} = ج^{3} \qquad لا\,ما\,ی = د^{3}$$

(ایمینول کالج - کیمبرج)

۲۴۷ — ثابت کرو کہ مساوات

$$لا^{4} - ن\,لا^{3} + ق\,لا^{2} - ر\,لا + \frac{ر^{2}}{ف^{2}} = 0$$

کی اصلیں تناسب میں ہیں، اس لئے $لا^{4} - ۱۲\,لا^{3} + ۴۷\,لا^{2} - ۷۲\,لا + ۳۶ = 0$ کو حل کرو۔

۲۴۸ — چاندماری میں ا پانچ نشانوں میں سے ۴ نشانے چاند پر ٹھیک لگا سکتا ہے۔ ب چار نشانوں میں سے تین اور ج تین نشانوں میں سے دو ٹھیک لگا سکتا ہے۔ وہ سب مل کر ایک ساتھ نشانے مارتے ہیں، بتاؤ کہ کم از کم دو نشانوں کے ٹھیک لگنے کا کیا احتمال ہے اور اگر دو نشانے ٹھیک لگیں تو اس امر کا کیا احتمال ہے کہ ج کا نشانہ خطا ہوا۔

(سینٹ کیتھرین کالج - کیمبرج)

۲۴۹ــــ ذیل کے ہر ایک سلسلہ کو ن رقموں تک جمع کرو:۔

(۱) ۱ + ۰ − ۱ + ۰ + ۷ + ۲۸ + ۷۹ + ...

(۲) $\frac{۳ \times ۲}{۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱} + \frac{۳^{۲} \times ۱}{۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲} + \frac{۳^{۳} \times ۶}{۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳} + \frac{۳^{۴} \times ۱۳}{۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴} + ...$

(۳) ۳ + لا + ۹ لا^{۲} + لا^{۳} + ۳۳ لا^{۴} + لا^{۵} + ۱۲۹ لا^{۶} + ...

(پبلک امتحان، آکسفورڈ)

۲۵۰ــــ ذیل کی مساواتوں کو حل کرو:۔

(۱) ما^{۲} + ما ی + ی^{۲} = ا لا
ی^{۲} + ی لا + لا^{۲} = ا ما
لا^{۲} + لا ما + ما^{۲} = ا ی

(۲) لا (ما + ی − لا) = ا
ما (ی + لا − ما) = ب
ی (لا + ما − ی) = ج

(پیمبرہاؤس کیمبرج)

۲۵۱ــــ اگر $\frac{۱}{ا} + \frac{۱}{ب} + \frac{۱}{ج} = \frac{۱}{ا + ب + ج}$ اور ن کوئی طاق صحیح عدد ہو

تو ثابت کرو کہ $\frac{۱}{ا^{ن}} + \frac{۱}{ب^{ن}} + \frac{۱}{ج^{ن}} = \frac{۱}{ا^{ن} + ب^{ن} + ج^{ن}}$

اگر ل^{۶} − م^{۶} + ۵ ل^{۲} م^{۲} (ل^{۲} − م^{۲}) + ۴ ل م (۱ − ل^{۲} م^{۲}) = ۰

تو ثابت کرو کہ (ل^{۲} − م^{۲})^{۶} = ۱۶ ل^{۲} م^{۲} (۱ − ل^{۶}) (۱ − م^{۶})

(پمبرک کالج۔ کیمبرج)

۲۵۲ــــ اگر لا + ما + ی = ۳ ف، ما ی + ی لا + لا ما = ۳ ق
لا ما ی = ر تو ثابت کرو کہ

(ما + ی − لا) (ی + لا − ما) (لا + ما − ی) = −۲۷ ف^{۳} + ۳۶ ف ق − ۸ ر

اور $(ما + ی - لا)^{۳} + (ی + لا - ما)^{۳} + (لا + ما - ی)^{۳} = ۲۷ ف^{۳} - ۲۴ ر$

۲۵۳— $\{ا(ب + ج) لا^{۲} + ب(ج + ا) ما^{۲} + ج(ا + ب) ی^{۲}\}^{۲} - ۴ ا ب ج$ $(لا^{۲} + ما^{۲} + ی^{۲})(ا لا^{۲} + ب ما^{۲} + ج ی^{۲})$ کے خطی اجزائے ضربی لا، ما، ی میں معلوم کرو۔

۲۵۴— ثابت کرو کہ

$$\left(\frac{لا^{۲} + ما^{۲} + ی^{۲}}{لا + ما + ی}\right)^{لا+ما+ی} > لا^{لا} ما^{ما} ی^{ی} > \left(\frac{لا + ما + ی}{۳}\right)^{لا+ما+ی}$$

(سینٹ جونز کالج کیمبرج)

۲۵۵— مساوات متماثلہ $\left\{۱ - \frac{۴ لا}{(۱ + لا)^{۲}}\right\}^{-\frac{۱}{۲}} = \frac{۱ + لا}{۱ - لا}$ سے ثابت کرو کہ

$$\sum_{ر=۱}^{ر=ن} (-۱)^{ن-ر} \frac{|ن + ر - ۱}{|ر \; |ر - ۱ \; |ن - ر} = ۱$$

(پیمبرک کالج۔ کیمبرج)

۲۵۶— ذیل کی مساواتوں کو حل کرو:

(۱) $ا لا + ب ما + ی = ی لا + ا ما + ب = ما ی + ب لا + ا = ۰$

(۲)

$$\begin{cases} لا + ما + ی - د = ۱۲ \\ لا^{۲} + ما^{۲} - ی^{۲} - د^{۲} = ۶ \\ لا^{۳} + ما^{۳} - ی^{۳} + د^{۳} = ۲۱۸ \\ لا ما + ی د = ۴۵ \end{cases}$$

۲۵۷— اگر ف = ق تقریباً اور ن > ۱ تو ثابت کرو کہ

$$\frac{(ن + ۱) ف + (ن - ۱) ق}{(ن - ۱) ف + (ن + ۱) ق} = \left(\frac{ف}{ق}\right)^{\frac{۱}{ن}}$$

اگر $\frac{ف}{ق}$، اعشاریہ کے ساتویں مقام تک ا کے مساوی ہو تو بتاؤ کہ اعشاریہ کے کون سے مقام تک یہ تقریب عام طور پر درست ہوگا۔

(ریاضی ٹرائی پاس)

۲۵۸ — ایک عورت نے ۵۴ پونڈ وزن کی چائے اور کافی خریدی۔ اگر وہ چائے کی مقدار کا $\frac{۵}{۹}$ اور کافی کی مقدار کا $\frac{۴}{۵}$ خریدتی تو اُس کو موجودہ قیمت خرید کا $\frac{۹}{۱۱}$ ادا کرنا پڑتا، اگر اس نے اتنی چائے خریدی ہوتی جتنی کہ کافی خریدی ہے اور اتنی کافی خریدی ہوتی جتنی کہ چائے خریدی ہے تو اُس کو ۵ شلنگ زیادہ دینے پڑتے۔ چائے کافی کی نسبت زیادہ قیمتی ہے اور ۶ پونڈ کافی کی قیمت ۲ پونڈ چائے کی قیمت سے بقدر ۵ شلنگ کے زیادہ ہے۔ چائے اور کافی کی قیمتیں معلوم کرو۔

۲۵۹ — اگر پہلے ن طبعی اعداد میں سے دو دو کے حاصل ضربوں کے مجموعہ کو $ج_ن$ سے تعبیر کیا جائے تو ثابت کرو کہ

$$\frac{۲}{\lfloor ۳} + \frac{۱۱}{\lfloor ۴} + \cdots\cdots + \frac{ج_{ن-۱}}{\lfloor ن} + \cdots\cdots = \frac{۱۱}{۲۴}\ و$$

(کیئس کالج - کیمبرج)

۲۶۰ — اگر

$$\frac{ف_۱}{ف\,ا^۲ + ۲\,ق\,ا\,ب + ر\,ب^۲} = \frac{ق_۱}{ف\,ا\,ج + ق(ب\,ج - ا^۲) - ر\,ا\,ب} = \frac{ر_۱}{ف\,ج^۲ - ۲\,ق\,ج\,ا + ر\,ا^۲}$$

تو ثابت کرو کہ ف، ف؛ ق، ق؛ اور ر، ر کو باہم بدل دینے سے تعادلات کی قیمت میں کوئی فرق نہیں آتا۔

(ریاضی ٹرائی پاس)

۲۶۱ — اگر عہ + بہ + جہ = ۰ تو ثابت کرو کہ

$$عہ^{ن+۳} + بہ^{ن+۳} + جہ^{ن+۳} = عہ\,بہ\,جہ\,(عہ^{ن} + بہ^{ن} + جہ^{ن}) + \frac{۱}{۲}(عہ^{۲} + بہ^{۲} + جہ^{۲})$$
$$-(عہ^{ن+۱} + بہ^{ن+۱} + جہ^{ن+۱})$$

(کیئس کالج - کیمبرج)

۲۶۲ — اگر عہ، بہ، جہ، لہ مساوات $لا^۴ + ف\,لا^۳ + ق\,لا^۲ + ر\,لا + س = ۰$ کی اصلیں ہوں تو مسروں کی رقوم میں جملہ $\Sigma\,(عہ - بہ)^۲(جہ - لہ)^۲$ کی قیمت

معلوم کرو۔ (لنڈن یونیورسٹی)

۲۶۳ — ایک شخص نے کچھ فیل مرغ، کچھ راج ھنس اور کچھ بطخیں خریدیں اور ہر ایک جانور کے لئے اتنے ہی شلنگ ادا کئے جتنے کہ اُس قسم کے پرندوں کی تعداد ہے۔ اُس نے کل ۲۳ پرندے خریدے اور ۱۰ پونڈ ۱۱ شلنگ ادا کئے۔ بتاؤ کہ اُس نے ہر قسم کے کتنے پرندے خریدے۔

۲۶۴ — ثابت کرو کہ مساوات (ما + ی − ۸ لا)^(۱/۳) + (ی + لا − ۸ ما)^(۱/۳) + (لا + ما − ۸ ی)^(۱/۳) = ۰ مساواتِ ذیل کے مُعادل ہے:۔

لا (ما − ی)^۲ + ما (ی − لا)^۲ + ی (لا − ما)^۲ = ۰

(سینٹ جونز کالج کیمبرج)

۲۶۵ — اگر مساوات ا/(لا + ا) + ب/(لا + ب) = ج/(لا + ج) + د/(لا + د) کی اصلوں میں سے ۲ اصلیں باہم مساوی ہوں تو یا مقادیر ا اور ب میں سے کوئی ایک مقادیر ج اور د میں سے ایک مقدار کے مساوی ہے یا ۱/ا + ۱/ب = ۱/ج + ۱/د،
نیز ثابت کرو کہ اس صورت میں اصلیں اُ ۔ ا'۔ ا''۔ بُ، ب'، ب''، ۔ ۲ اب/(ا + ب) کے مساوی ہونگی۔

(ریاضی ٹرائی پاس)

۲۶۶ — مُعادلات ذیل کو حل کرو:

(۱) لا + ما + ی = اب ، لا^(-۱) + ما^(-۱) + ی^(-۱) = ا^(-۱) ب^(-۱)، لا ما ی = ا^۳

(۲) ا ما ی + ب ما + ج ی = ب ی لا + ج ی + ا لا = ج لا ما + ا لا + ب ما = ا + ب + ج

(پبلک امتحان آکسفورڈ)

۲۶۷ — جملۂ ذیل کو مختصر کرو۔

$$\frac{\text{عہ}^{3}}{(\text{عہ}-\text{بہ})(\text{عہ}-\text{جہ})(\text{عہ}-\text{لہ})(\text{عہ}-\text{کہ})}+\frac{\text{بہ}^{3}}{(\text{بہ}-\text{عہ})(\text{بہ}-\text{جہ})(\text{بہ}-\text{لہ})(\text{بہ}-\text{کہ})}+\ldots\ldots+\frac{\text{کہ}^{3}}{(\text{کہ}-\text{عہ})(\text{کہ}-\text{بہ})(\text{کہ}-\text{جہ})(\text{کہ}-\text{لہ})}$$

(لنڈن یونیورسٹی)

۲۶۸ — پادریوں، ڈاکٹروں اور وکیلوں کی ایک جماعت کے متعلق یہ معلوم کیا گیا ہے کہ تمام حاضرین کی عمروں کا مجموعہ ۲۱۶۰ ہے، اُن کی اوسط عمر ۳۶ ہے، پادریوں اور ڈاکٹروں کی اوسط عمر ۳۹ ہے، ڈاکٹروں اور وکیلوں کی $\frac{8}{11}$ ۳۲، پادریوں اور وکیلوں کی $\frac{2}{3}$ ۳۶، اگر ہر ایک پادری ایک سال، ہر ایک وکیل ۷ سال اور ہر ایک ڈاکٹر ۶ سال بڑا ہوتا تو اُن کی اوسط عمر ۵ سال زیادہ ہوتی۔ بتاؤ کہ مختلف پیشوں کے آدمیوں کی تعداد کیا ہے؟ نیز اُن کی اوسط عمریں معلوم کرو۔

۲۶۹ — بتاؤ کہ جملۂ ذیل:

$$\text{ا}_0\,\text{لا}^{4}+4\,\text{ا}_1\,\text{لا}^{3}\,\text{ما}+6\,\text{ا}_2\,\text{لا}^{2}\,\text{ما}^{2}+4\,\text{ا}_3\,\text{لا}\,\text{ما}^{3}-\text{ا}_4\,\text{ما}^{4}$$

کے سرکیا شرط پوری کریں کہ یہ جملہ لا اور ما میں دو خطی جملوں کی چوتھی قوتوں کے حاصل جمع کی شکل میں تحویل ہو سکے۔

[لنڈن یونیورسٹی]

۲۷۰ — مساوات ذیل کی حقیقی اصلیں معلوم کرو:-

$$\text{لا}^{2}+\text{و}^{2}+\text{ھ}^{2}=\text{ا}^{2} \qquad \text{و}\,\text{ھ}+\text{ء}\,(\text{ما}+\text{ی})=\text{ب}\,\text{ج}$$

$$\text{ما}^{2}+\text{ھ}^{2}+\text{ء}^{2}=\text{ب}^{2} \qquad \text{ھ}\,\text{ء}+\text{و}\,(\text{ی}+\text{لا})=\text{ج}\,\text{ا}$$

$$\text{ی}^{2}+\text{ء}^{2}+\text{و}^{2}=\text{ج}^{2} \qquad \text{ء}\,\text{و}+\text{ھ}\,(\text{لا}+\text{ما})=\text{ا}\,\text{ب}$$

[ریاضی ٹرائی پاس]

۲۷۱ — گالک زبان کے الفاظ میں یہ ایک کلیہ ہے کہ حروف تہجی کا کوئی حرف یا حروف صحیح کا مجموعہ ایک تام حرفِ علت اور ناقص حرفِ علت کے درمیان نہیں آسکتا۔ تام حروف علت [illegible] ہیں اور ناقص حروفِ علت [illegible] اور [illegible] ہیں۔

ثابت کروکہ اُن کُل لفظوں کی تعداد جو ن حروف صحیح اور حروف علت a e o سے بن سکتے ہیں $\frac{۲|ن+۳}{ن+۲}$ ہے جبکہ ہر لفظ میں (ن + ۳) حروف ہوں اور کوئی حرف ایک لفظ میں مکرر نہ آئے۔

(کیئس کالج ۔ کیمبرج)

۲۷۲ — اگر $لا^۲ + ما^۲ = ۲ ی^۲$ جہاں لا، ما، ی اعداد صحیح ہیں تو

ثابت کروکہ $۲ لا = ر(ل^۲ + ۲ ل ک - ک^۲)$، $۲ ما = ر(ک^۲ + ۲ ل ک - ل^۲)$

$$۲ ی = ر (ل^۲ + ک^۲)$$

ر، ل، ک اعداد صحیح کو تعبیر کرتے ہیں۔

(کیئس کالج ۔ کیمبرج)

۲۷۳ — سلسلہ $\frac{۱}{۱+۱}$ $\frac{۱}{۱+۱}$ $\frac{۲}{۳+۳}$ $\frac{۴}{۵+۵}$ $\frac{۶}{۷+۷}$ ...... تالاتناہی کو جمع کرو۔

۲۷۴ — سلاسل ذیل کو جمع کرو (۱) $\frac{لا^۲}{۲ \times ۳} + \frac{۲ لا^۳}{۳ \times ۴} + \frac{۳ لا^۴}{۴ \times ۵} + ...$ تالاتناہی

(۲) $\frac{|۱}{۱+ا} + \frac{|۲}{(ا+۱)(ا+۲)} + ... + \frac{|ن}{(ا+۱)(ا+۲) ...... (ا+ن)}$

۲۷۵ — معادلات ذیل کو حل کرو

(۱) ۲ لا ما ی + ۳ = (۲ لا - ۱)(۳ ما + ۱)(۴ ی - ۱) + ۱۲

= (۲ لا + ۱)(۳ ما - ۱)(۴ ی + ۱) + ۸۰ = ۰

(۲) ۳ و لا - ۲ و ما = و لا + و ما = $۳ و^۲ + ۲ و^۲$ = ۱۴، لا ما = ۱۰ و و

۲۷۶ - ثابت کروکہ

$ا^۲ + لہ$	ا ب	ا ج	ا د
ا ب	$ب^۲ + لہ$	ب ج	ب د
ا ج	ب ج	$ج^۲ + لہ$	ج د
ا د	ب د	ج د	$د^۲ + لہ$

$لا^{۳}$ پر تقسیم ہو سکتا ہے دوسرا جزوِ ضربی معلوم کرو۔

(کارپس کالج کیمبرج)

۲۷۷ — اگر ا، ب، ج ..... مساوات

$$لا^{ن} + ف_{۱} لا^{ن-۱} + ف_{۲} لا^{ن-۲} + \dots + ف_{ن-۱} لا + ف_{ن} = ۰$$

کی اصلیں ہوں تو $ا^{۳} + ب^{۳} + ج^{۳} + \dots$ کا حاصل جمع معلوم کرو اور نیز ثابت کرو کہ

$$\frac{ا^{۲}}{ب} + \frac{ب^{۲}}{ا} + \frac{ا^{۲}}{ج} + \frac{ج^{۲}}{ا} + \frac{ب^{۲}}{ج} + \frac{ج^{۲}}{ب} + \dots\dots$$

$$= ف_{۱} - \frac{ف_{ن-۱}(ف_{۱}^{۲} - ۲ف_{۲})}{ف_{ن}}$$

(سینٹ جونز کالج کیمبرج)

۲۷۸ — $\frac{۱ + ۲لا}{۱ - لا^{۳}}$ کی تفصیل سے یا کسی اور طرح سے ثابت کرو کہ

$$۱ - ۳ن + \frac{(۳ن-۱)(۳ن-۲)}{۱ \times ۲} - \frac{(۳ن-۲)(۳ن-۳)(۳ن-۴)}{۱ \times ۲ \times ۳}$$

$$+ \frac{(۳ن-۳)(۳ن-۴)(۳ن-۵)(۳ن-۶)}{۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴} - \dots\dots = (-۱)^{ن}$$

جہاں ن کوئی صحیح عدد ہے اور سلسلہ پہلی رقم پر جو معدوم ہو جائے ختم ہو جاتا ہے۔

(ریاضی ٹرائی پاس)

۲۷۹ — دو شکاری ا اور ب شکار کھیلنے نکلے اور ۱۰ پرندے مار کر لائے دونوں نے جتنے نشانے مارے اُن کے مربعوں کا حاصل جمع ۲۸۸۰ ہے، دونوں کے نشانوں کا حاصل ضرب دونوں کے پرندوں کے حاصل ضرب کا ۴۸ گنا ہے۔ اگر ب اتنے نشانے مارتا جتنے ا نے مارے اور ا اتنے مارتا جتنے ب نے مارے ہیں تو ب، ا کی نسبت ۵ زیادہ پرندے مارتا۔ بتاؤ کہ ہر ایک نے کتنے

پرندے مارے۔

۲۸۰ — ثابت کرو کہ $8(ا^3 + ب^3 + ج^3)^2 > 9(ا^2 + ب ج)(ب^2 + ج ا)(ج^2 + ا ب)$ (پمبرک کالج۔ کیمبرج)

۲۸۱ — ثابت کرو کہ $\frac{2}{3}, \frac{4}{4}, \frac{6}{5}$ ..... کا ن واں متدق $\frac{2^{ن+1}}{(ن-1)!\ ...} - 2$ ہے (کنگز کالج، کیمبرج)

اگر ن لامتناہی ہو تو اس کی انتہا معلوم کرو۔

۲۸۲ — اگر $\frac{ق_ن}{ل_ن}$ کسرِ مسلسل

$\frac{1}{ا+}\ \frac{1}{ب+}\ \frac{1}{ج+}\ \frac{1}{ا+}\ \frac{1}{ب+}\ \frac{1}{ج+}$ .....

کا ن واں متدق ہو تو ثابت کرو کہ $ق_{3ن+3} = ب ق_{3ن} + (ب ج + 1) ل_{3ن}$

(کوئینز کالج۔ کیمبرج)

۲۸۳ — ن خطوطِ مستقیم ہیں جن کے طول بالترتیب ۱، ۲، ۳ ..... ن انچ ہیں۔ ثابت کرو کہ جن مختلف طریقوں سے ان خطوطِ مستقیم میں سے ۴ ایسے خط منتخب کئے جا سکتے ہیں کہ اُن سے بنے ہوئے ذوار بعۃ الاضلاع کے اندر ایک دائرہ کھینچا جا سکے اُن کی تعداد $\frac{1}{48}\{2ن(ن-2)(2ن-5) - 3 + 3(-1)^ن\}$ ہے۔

(ریاضی ٹرائی پاس)

۲۸۴ — جو عدد ن سے کم ہیں اور بلحاظ اس کے مفرد ہیں۔ اُن کے مربعوں اور مکعبوں کے اوسطِ حسابی بالترتیب $ی_2$، $ی_3$ ہیں ثابت کرو کہ

$ن^3 - 6 ن ی_2 + 4 ی_3 = 0$ جہاں ۱ کو بطور عدد مفرد کے شمار کیا گیا ہے۔

(سینٹ جونز کالج کیمبرج)

۲۸۵ — اگر ن ، ۶ م - ۱ کی شکل کا ہو تو ثابت کرو کہ (ا - ی)ن + (ی - لا)ن + (لا - ا)ن پورا تقسیم ہو سکتا ہے لا۲ + ا۲ + ی۲ - ا ی - ی لا - لا ا پر اور اگر ن ، ۶ م + ۱ کی شکل کا ہو تو ثابت کرو کہ یہ پورا تقسیم ہو سکتا ہے

(لا۲ + ا۲ + ی۲ - ا ی - ی لا - لا ا)۲ پر۔

۲۸۶ — اگر ن مقادیر ا۱ ، ا۲ ، ا۳ ..... ان کی م ویں قوتوں کا مجموعہ ج ہو اور ان مقادیر میں سے م م کے حاصل ضربوں کا مجموعہ ض ہو تو ثابت کرو کہ |ن - ۱ × ج > |ن - م |م - ۱ × ض (کیئس کالج کیمبرج)

۲۸۷ — ثابت کرو کہ اگر مساواتوں

لا۳ + ق لا - ر = ۰

اور ر لا۳ - ۲ ق۲ لا۲ - ۵ ق ر لا - ۲ ق۳ - ر۲ = ۰

کی ایک اصل مشترک ہو تو پہلی مساوات کی دو اصلیں مساوی ہونگی اور اگر ان مساوی اصلوں میں سے ہر ایک ا کے مساوی ہو تو دوسری مساوات کی اصلیں دریافت کرو۔ (انڈیا سول سروس)

۲۸۸ — اگر لا ا ۲ ا۲ - ۳ لا۲ + ا ا ۲ ا۲ - ۳ ا۲ + ی ا ۲ ا۲ - ۳ ی۲ = ۰ جہاں ا۲ ، لا۲ + ا۲ + ی۲ کو تعبیر کرتا ہے تو ثابت کرو کہ

(لا + ا + ی)(- لا + ا + ی)(لا - ا + ی)(لا + ا - ی) = ۰

(ٹرنٹی کالج - کیمبرج)

۲۸۹ — لا۱ ، لا۲ ، لا۳ .... لان کی قیمتیں معلوم کرو جو ذیل کی ہمزاد مساواتوں کو پورا کرتی ہیں -

$$\frac{\text{لا}_1}{\text{ا}_1 - \text{ب}_1} + \frac{\text{لا}_2}{\text{ا}_1 - \text{ب}_2} + \cdots + \frac{\text{لا}_\text{ن}}{\text{ا}_1 - \text{ب}_\text{ن}} = 1$$

$$\frac{\text{لا}_1}{\text{ا}_2 - \text{ب}_1} + \frac{\text{لا}_2}{\text{ا}_2 - \text{ب}_2} + \cdots + \frac{\text{لا}_\text{ن}}{\text{ا}_2 - \text{ب}_\text{ن}} = 1$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$\frac{\text{لا}_1}{\text{ا}_\text{ن} - \text{ب}_1} + \frac{\text{لا}_2}{\text{ا}_\text{ن} - \text{ب}_2} + \cdots + \frac{\text{لا}_\text{ن}}{\text{ا}_\text{ن} - \text{ب}_\text{ن}} = 1$$

(لنڈن یونیورسٹی)

۲۹۰ — ثابت کرو کہ

$$\begin{vmatrix} \text{ما ی} - \text{لا}^2 & \text{ی لا} - \text{ما}^2 & \text{لا ما} - \text{ی}^2 \\ \text{ی لا} - \text{ما}^2 & \text{لا ما} - \text{ی}^2 & \text{ما ی} - \text{لا}^2 \\ \text{لا ما} - \text{ی}^2 & \text{ما ی} - \text{لا}^2 & \text{ی لا} - \text{ما}^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{و}^2 & \text{و}^2 & \text{ر}^2 \\ \text{و}^2 & \text{ر}^2 & \text{و}^2 \\ \text{ر}^2 & \text{و}^2 & \text{و}^2 \end{vmatrix}$$

جہاں $\text{ر}^2 = \text{لا}^2 + \text{ما}^2 + \text{ی}^2$ اور $\text{و}^2 = \text{ما ی} + \text{ی لا} + \text{لا ما}$

(ٹرنٹی کالج کیمبرج)

۲۹۱ — ایک کام کو ا، ب، ج نے مل کر ختم کیا، پہلے ا اکیلا کام کرتا رہا کچھ دنوں کے بعد ب آشامل ہوا اور پھر کچھ دنوں کے بعد ا اور ب کے ساتھ ج بھی آکر شامل ہو گیا۔ جتنے دن ب اور ج نے جدا گانہ کام کیا ہے اگر ان میں سے ہر ایک اس سے دُگنے دن کام کرتا تو دونوں مل کر کام ختم کر سکتے تھے، اگر ا اپنے ایامِ کار کی تعداد کے $\frac{1}{2}$ دن کام کرتا اور ج اپنے ایامِ کار کی تعداد کے ۴ گنا دن کام کرتا تو دونوں اس کام کو ختم کر سکتے تھے، یا اگر ا اور ب بغیر ج کی مدد کے ۴۰ دن کام کرتے تو بھی کام ختم ہو سکتا تھا یا اگر تینوں ملکر اتنے دن کام کرتے جتنے دن ب نے کیا ہے تو بھی کام ختم ہو جاتا۔ ب کے شامل ہونے سے پہلے جتنے دن کام ہوتا رہا اور ج کے شامل ہونے سے پہلے جتنے دن کام ہوتا رہا ہے ان کی نسبت ۳ : ۵ ہے — بتاؤ کہ ہر ایک آدمی نے کتنے دن کام کیا۔

۲۹۲ — ثابت کرو کہ اگر مقادیر

۱، لا، لا^۲، لا^۳، ...... لا^{ن-۱}

میں سے ر، ر رقموں کے حاصل ضربوں کے مجموعہ کو ج_ر سے تعبیر کیا جائے تو

ج_{ن-ر} = ج_ر لا^{½(ن-۱)(ن-۲ر)}

(سینٹ جونز کالج کیمبرج)

۲۹۳ — اگر ا، ب اور ج مثبت ہوں اور ان میں سے ہر دو کا مجموعہ تیسرے سے بڑا ہو تو ثابت کرو کہ

$$\left(1+\frac{ب-ج}{ا}\right)^{ا}\left(1+\frac{ج-ا}{ب}\right)^{ب}\left(1+\frac{ا-ب}{ج}\right)^{ج} > 1$$

(سینٹ جونز کالج کیمبرج)

۲۹۴ — اجزائے ضربی میں تحلیل کرو:

$$(ا+ب+ج)(ب+ج-ا)(ج+ا-ب)(ا+ب-ج)(ا^2+ب^2+ج^2)-8ا^2ب^2ج^2$$

ثابت کرو کہ

$$4\{ع^4+ہ^4+جہ^4+(ع+ہ+جہ)^4\}=(ہ+جہ)^4+(جہ+ع)^4+(ع+ہ)^4$$

$$+6(ہ+جہ)^2(جہ+ع)^2+6(جہ+ع)^2(ع+ہ)^2+6(ع+ہ)^2(ہ+جہ)^2$$

(جیس کالج کیمبرج)

۲۹۵ — ثابت کرو کہ اعداد ۱، ۲، ۳، .... ن اور ان کی قوتوں کے ر ابعاد کے متجانس حاصل ضربوں کا مجموعہ یہ ہے

$$\frac{(-1)^{ن-1}}{\lfloor ن-1}\left\{1^{ن+ر-1}-\frac{ن-1}{1}\times 2^{ن+ر-1}+\frac{(ن-1)(ن-2)}{1\times2}3^{ن+ر-1}-\ldots \text{ن رقوم تک}\right\}$$

(ایمینوئل کالج کیمبرج)

۲۹۶ — ثابت کرو کہ اگر ن مثبت صحیح عدد ہو تو

$$1-3ن+\frac{3ن(3ن-3)}{1\times2}-\frac{3ن(3ن-4)(3ن-5)}{1\times2\times3}+\ldots=2(-1)^{ن}$$

(آکسفورڈ موڈز)

۲۹۷ — اگر لا(۲ا - ما) = ما(۲ا - ی) = ی(۲ا - د) = د(۲ا - لا) = ب^2

تو ثابت کرو کہ لا = ما = ی = د بالاستثنائے اُس صورت کے جبکہ ب^2 = ۲ا^2 اگر یہ شرط پوری ہو تو مساواتیں غیر تابع نہیں رہتیں۔

(ریاضی ٹرائی پاس)

۲۹۸ — ثابت کرو کہ اگر ا، ب، ج مثبت اور غیر مساوی ہوں تو مساواتیں

الا + ی ما + ی = ۰ ، ی لا + ب ما + ی = ۰ ، ما ی + ی لا + ج = ۰

سے لا، ما، ی کی حقیقی قیمتوں کے تین مختلف جُٹ حاصل ہوتے ہیں اور لا، ما میں سے ہر ایک کی تین قیمتوں کے حاصل ضربوں کی نسبت ب(ب - ج) : ا(ج - ا) ہے۔

(آکسفورڈ موڈز)

۲۹۹ — اگر اَ = الا - ب ما - ج ی ، دَ = ب ی + ج ما

بَ = ب ما - ج ی - الا ، عَ = ج لا + ا ی

جَ = ج ی - الا - ب ما ، فَ = ا ما + ب لا

تو ثابت کرو کہ اَ بَ جَ - اَ دَ^{2} - بَ عَ^{2} - جَ فَ^{2} + ۲ دَ عَ فَ

= (ا^2 + ب^2 + ج^2)(الا + ب ما + ج ی)(لا^2 + ما^2 + ی^2)

(پبلک امتحان آکسفورڈ)

۳۰۰ — ایک طالب علم ایک پرانے دستی نسخہ کو پڑھنا چاہتا ہے، اسی قسم کے گزشتہ تجربوں سے اُسے معلوم ہے کہ وہ روزانہ جتنے الفاظ پڑھ سکتا ہے اُنکی تعداد گھنٹوں میں اُس کے روزانہ کام اور میلوں میں اُس کی روزانہ سیر کے حاصل ضرب کے متناسب ہے، بنا بریں وہ روزانہ کام میں بحساب ایک گھنٹہ فی روز اور روزانہ ورزش میں بحساب ایک میل فی روز کا اضافہ کرنا

شروع کرتا ہے اور پہلے دن اپنی معمولی محنت اور ورزش سے شروع کرتا ہے۔ اس نے دیکھا کہ نسخہ میں کل ۲۳۲۰۰۰ الفاظ ہیں، پہلے دن اُس نے ۱۲۰۰۰ الفاظ پڑھے اور آخری دن ۲۷۰۰۰، نیز نصف وقت کے آخر تک اس نے کل ۶۲۰۰۰ لفظ پڑھے اُس کی روزانہ ورزش اور کام کی معمولی مقداریں دریافت کرو۔

تمت

جوابات

جبر و مقابلہ حصہ دوم

اشتلہ نمبری ۱۸ (ا) (صفحات ۷ و ۸)

۱- ۱۱۴۶ پونڈ ۱۴ شلنگ ۱۰ پنس ۲- ۷۲۰ پونڈ

۳- ۱۴ء۲ سال ۴- ۶۷۶۸ پونڈ ۷ شلنگ ۱۰$\frac{1}{2}$ پنس

۵- ۹ء۶ سال ۸- ۴۹۶ پونڈ ۱۹ شلنگ ۴$\frac{3}{4}$ پنس

۹- ۷ سال سے کچھ کم ۱۰- ۱۱۹ پونڈ ۱۸ شلنگ ۵$\frac{3}{4}$ پنس

اشتلہ نمبری ۱۸ (ب) (صفحات ۱۴ تا ۱۷)

۱- ۶ فی صدی ۲- ۳۱۳۷ پونڈ ۲ شلنگ ۲$\frac{2}{3}$ پنس

۳- ۱۱۰ پونڈ ۴- ۳ فی صدی ۵- ۲۸$\frac{4}{7}$ سال

۶- ۱۲۷۵ پونڈ ۷- ۹۲۶ پونڈ ۲ شلنگ

۸- ۶۷۵۵ پونڈ ۱۳ شلنگ ۹- ۱۸۳ پونڈ ۱۸ شلنگ

۱۰- ۳$\frac{1}{5}$ فی صدی ۱۱- ۶۱۶ پونڈ ۹ شلنگ ۱$\frac{1}{2}$ پنس

۱۳- ۱۳۰۸ پونڈ ۱۲ شلنگ ۴$\frac{1}{2}$ پنس ۱۵- ۴۲۰۰ پونڈ

امثلہ نمبری ۱۹ (اَ) (صفحات ۲۶ تا ۲۸)

۸- $اَ^۳ + ۲ب^۳$ بڑا ہے　۱۲- $لا^۳ >$ یا $< لا^۲ + لا + ۲$ جبکہ لا > یا < ۲

۱۴- لا کی بڑی سے بڑی قیمت ۱ ہے۔　۱۵- ۴، ۸

۲۲- $۴^۴ \times ۵^۵$ جب کہ لا = ۳　۲۳- ۹ جبکہ لا = ۱

امثلہ نمبری ۱۹ (ب) (صفحات ۳۳ تا ۳۵)

۱۰- $\frac{۳^۳ \times ۵^۵}{۲^۲}$ اَ ؛ $\sqrt{\frac{۳}{۵}} \cdot \sqrt[۳]{\frac{۲}{۵}}$

امثلہ نمبری ۲۰ (صفحات ۴۶ تا ۴۷)

۱- $-\frac{۱۰}{۷}$ ؛ $-\frac{۹}{۴}$　۲- ۹ ؛ $\frac{۱}{۹}$　۳- $\frac{۱}{۲}$ ؛ $\frac{۵}{۳}$

۴- $-\frac{۱۵}{۸}$ ؛ ۲　۵- ۱ ؛ صفر　۶- صفر ؛ −۳۰　۷- $-\frac{۳}{۲}$

۸- لوک اَ - لوک ب　۹- ۲　۱۰- م $و^{م اَ}$　۱۱- $\frac{۱}{۲\sqrt{اَ}}$

۱۲- $\frac{۱}{۳}$　۱۳- −۱　۱۴- $\frac{۲\sqrt{اَ}}{۳\sqrt{اَ}+۱}$　۱۵- $\sqrt{اَ}$　۱۶- صفر

۱۷- $\frac{۳}{۲}$　۱۸- $و^{\frac{۲}{۳}}$

امثلہ نمبری ۲۱ (اَ) (صفحات ۶۶ تا ۶۸)

۱- مستدق　۲- مستدق　۳- مستدق

۴- لا < ۱ یا لا = ۱ مستدق ؛ لا > ۱ متسع

۵- نتیجہ مثال (۴) کے مطابق ہے۔　۶- مستدق۔　۷- متسع

۸- لا < ا مستدق ؛ لا > ا یا لا = ا متسع
۹- متسع جب تک ق > ۲ نہ ہو- ۱۰- لا < ا یا لا = ا مستدق؛ لا > ا متسع
۱۱- اگر لا < ا مستدق؛ لا > ا یا لا = ا متسع- ۱۲- نتیجہ مثال (۱۱) کے مطابق ہے-
۱۳- متسع جب تک ق > ا نہ ہو- ۱۴- لا < ا یا لا = ا مستدق؛ لا > ا متسع
۱۵- مستدق ۱۶- متسع ۱۷- (۱) متسع (۲) مستدق
۱۸- (۱) متسع (۲) مستدق-

امثلہ نمبری ۲۱ (ب) (صفحات ۸۲ تا ۸۴)

۱- لا < ا یا لا = ا مستدق ؛ لا > ا متسع
۲- نتیجہ مثال (۱) کے مطابق ہے- ۳- نتیجہ مثال (۱) کے مطابق ہے-
۴- لا < $\frac{1}{و}$ یا لا = $\frac{1}{و}$ مستدق؛ لا > $\frac{1}{و}$ متسع
۵- لا < و مستدق؛ لا > و یا لا = و متسع
۶- لا < ا مستدق؛ لا > ا یا لا = ا متسع ۷- متسع
۸- لا < $\frac{1}{و}$ مستدق؛ لا > $\frac{1}{و}$ یا لا = $\frac{1}{و}$ متسع
۹- لا < ا مستدق؛ لا > ا متسع- اگر لا = ا اور اگر جہ- عہ- بہ ثبت ہو تو مستدق- اور اگر جہ- عہ- بہ منفی یا صفر ہو تو متسع-
۱۰- لا < ا مستدق؛ لا > ا یا لا = ا متسع- یہ نتائج ق کی تمام قیمتوں پر صادق آتے ہیں خواہ مثبت ہو یا منفی-
۱۱- اُ منفی یا صفر، مستدق ؛ اُ مثبت، متسع-

امثلہ نمبری ۲۲ (ا) (صفحات ۹۱ تا ۹۳)

۱- $\frac{1}{۳}$ ن (۴ ن^{۲}- ۱) ۲- $\frac{1}{۴}$ ن (ن + ۱) (ن + ۲) (ن + ۳)

۳- ۱/۱۲ ن (ن + ۱) (ن + ۲) (۳ن + ۵) ۴- ن² (۲ن² - ۱)

۵- ۱/۳۰ ن (ن + ۱) (۲ن + ۱) (۳ن² + ۳ن - ۱) ۶- ق³ = ر²

۷- ب³ = ۲۷ ا² د، ج³ = ۲۷ ا د²

۸- ا د = ب ف، ۴ ا² ج - ب² = ۸ ا³ ف

۱۳- ا ب ج + ۲ ف گ ھ - ا ف² - ب گ² - ج ھ² = ۰

امثلہ نمبری ۲۲ (ب) (صفحات ۹۷ تا ۹۹)

۱- ۱ + ۳ لا + ۴ لا² + ۷ لا³ ۲- ۱ - ۷ لا - لا² - ۴۳ لا³

۳- ۱/۲ + ۱/۴ لا - ۳/۸ لا² + ۱/۱۶ لا³ ۴- ۳/۲ + ۵/۴ لا + ۱۱/۸ لا² + ۲۱/۱۶ لا³

۵- ۱ - ا لا + ا (ا + ۱) لا² - (ا³ + ۲ ا² - ۱) لا³

۶- ا = ۱، ب = ۲ ۷- ا = ۱، ب = -۱، ج = ۲

۹- آیندہ کی رقم ۳ .... ء + ہے

۱۱- اⁿ / (۱ - ا) (۱ - ا²) (۱ - ا³) ...... (۱ - اⁿ)

امثلہ نمبری ۲۳ (صفحات ۱۰۸ — ۱۱۰)

۱- ۲/(۱ - ۳لا) - ۵/(۱ - ۲لا) ۲- ۶/(۳لا - ۵) - ۵/(۴لا + ۳)

۳- ۴/(۱ - ۲لا) - ۳/(۱ - لا) ۴- ۲/(لا - ۱) + ۳/(لا - ۲) - ۴/(لا - ۳)

۵- $۱ + \frac{۱}{لا} - \frac{۱}{۵(لا-۱)} - \frac{۸}{۵(۲لا+۳)}$

۶- $\frac{۱}{لا-۱} - \frac{۱}{لا+۲} - \frac{۳}{(لا+۲)^۲}$

۷- $لا - ۲ + \frac{۱۷}{۱۶(لا+۱)} - \frac{۱۱}{۴(لا+۱)^۲} - \frac{۱۷}{۱۶(لا-۳)}$

۸- $\frac{۲لا+۳}{لا^۲+۱} - \frac{۱۵}{لا+۵}$ ۹- $\frac{۳لا}{لا^۲+۲لا-۵} - \frac{۱}{لا-۳}$

۱۰- $\frac{۵}{(لا-۱)^۴} - \frac{۷}{(لا-۱)^۳} + \frac{۱}{(لا-۱)^۲} + \frac{۳}{لا-۱}$

۱۱- $\frac{۱}{لا-۱} - \frac{۱}{لا+۱} + \frac{۲}{(لا+۱)^۲} - \frac{۳}{(لا+۱)^۳} + \frac{۲}{(لا+۱)^۴}$

۱۲- $\frac{۴}{۳(۱+۷لا)} - \frac{۱}{۳(۱+۴لا)}$ ؛ $\frac{(-۱)^ر}{۳}(۴ \times ۷^ر - ۴^ر)لا^ر$

۱۳- $\frac{۱۱}{۳(۱-لا)} - \frac{۴}{۳(۲+لا)}$ ؛ $\frac{۱}{۳}\left(۱۱ + \frac{(-۱)^{ر-۱}}{۲^{ر-۱}}\right)لا^ر$

۱۴- $۱ + \frac{۷}{۳(لا+۵)} - \frac{۷}{۳(لا+۲)}$ ؛ $(-۱)^ر \frac{۷}{۳}\left(\frac{۱}{۵^{ر+۱}} - \frac{۱}{۲^{ر+۱}}\right)لا^ر$

۱۵- $\frac{۱}{۱-لا} - \frac{۱}{۱+لا} - \frac{۴}{۱-۲لا}$ ؛ $\left\{۱ + (-۱)^{ر-۱} - ۲^{ر+۲}\right\}لا^ر$

۱۶- $\frac{۴}{۳(۱+۲لا)} - \frac{۱}{۳(۱-لا)} + \frac{۳}{(۱-لا)^۲}$ ؛ $\frac{۱}{۳}\left\{۹ر + ۸ + (-۱)^ر ۲^{ر+۲}\right\}لا^ر$

۱۷- $\frac{۱}{۴(۱-۴لا)} + \frac{۱۱}{۴(۱-۴لا)^۲}$ ؛ $۴^{ر-۱}(۱۱ر + ۱۲)لا^ر$

۱۸- $\frac{۲}{۱+لا} + \frac{۳}{(۱+لا)^۲} - \frac{۶}{۲+۳لا}$ ؛ $(-۱)^ر\left(۳ر + ۵ - \frac{۳^{ر+۱}}{۲^ر}\right)لا^ر$

۱۹- $\frac{۳}{۲(۱-لا)} + \frac{۱-۳لا}{۲(۱+لا^۲)}$ ؛ ر جفت $\frac{۱}{۲}\left\{(-۱)^{\frac{ر}{۲}} - ۳\right\}لا^ر$ ؛ ر طاق $\frac{۳}{۲}\left\{۱ + (-۱)^{\frac{ر-۱}{۲}}\right\}لا^ر$

۲۰- $\frac{۲}{(۱-لا)^۳} - \frac{۳}{(۱-لا)^۲} + \frac{۲}{۱-لا}$ ؛ $(ر^۲+۱)\,لا^ر$

۲۱- $\left\{\frac{ا^{ر+۲}}{(ا-ب)(ا-ج)} + \frac{ب^{ر+۲}}{(ب-ج)(ب-ا)} + \frac{ج^{ر+۲}}{(ج-ا)(ج-ب)}\right\} لا^ر$

۲۲- $\frac{۵}{(۲-لا)^۲} - \frac{۲}{۲-لا} + \frac{۱}{(۱-لا)^۲} + \frac{۲}{۱-لا}$ ؛ $\left\{ر+۳ - \frac{۵ر+۹}{۲^{ر+۲}}\right\} لا^ر$

۲۳- (۱) $\frac{۱}{لا(۱-لا)} \left\{\frac{۱}{۱+لا^{ن+۱}} - \frac{۱}{۱+لا}\right\}$

(۲) $\frac{۱}{(۱-ا)^۲}\left\{\frac{۱}{۱+ا^ن لا} - \frac{۱}{۱+ا^{ن+۱}لا} - \frac{۱}{۱+لا} + \frac{۱}{۱+ا\,لا}\right\}$

۲۴- $\frac{۱}{لا(۱-لا)(۱-لا^۲)}$ ۲۵- $\frac{۱}{(۱-لا)^۲}\left\{\frac{لا}{۱-لا} - \frac{لا^۲}{۱-لا^۲} - \frac{لا^{ن+۱}}{۱-لا^{ن+۱}} + \frac{لا^{ن+۲}}{۱-لا^{ن+۲}}\right\}$

امثلہ نمبری ۲۴- (صفحات ۱۱۹ تا ۱۲۱)

۱- $\frac{۱+۳لا}{(۱-لا)^۲}$ ؛ $(۴ر+۱)\,لا^ر$ ۲- $\frac{۲+لا}{۱+لا-۲لا^۲}$ ؛ $\{۱+(-۱)^ر\,۲^ر\}\,لا^ر$

۳- $\frac{۲-۳لا}{۱-۳لا+۲لا^۲}$ ؛ $(۱+۲^ر)\,لا^ر$ ۴- $\frac{۷-۲۰لا}{۱-۲لا-۳لا^۲}$ ؛ $\left\{\frac{۲۷}{۴}(-۱)^ر + \frac{۳}{۴}\right\} لا^ر$

۵- $\frac{۳-۱۲لا+۱۱لا^۲}{۱-۶لا+۱۱لا^۲-۶لا^۳}$ ؛ $(۳^ر+۲^ر+۱)\,لا^ر$ ۶- $۳^{ن-۱}+۲^{ن-۱}$ ؛ $\frac{۱}{۲}(۳^ن-۱)+۲^ن-۱$

۷- $(۲\times۳^{ن-۱} - ۳\times۲^{ن-۱})\,لا^{ن-۱}$ ؛ $\frac{۲(۱-۳^ن لا^ن)}{۱-۳لا} - \frac{۳(۱-۲^ن لا^ن)}{۱-۲لا}$

۸- $(۳^{ن-۱}+۴^{ن-۱})\,لا^{ن-۱}$ ؛ $\frac{۱-۴^ن لا^ن}{۱-۴لا} + \frac{۱-۳^ن لا^ن}{۱-۳لا}$

۹- $(۱+۳^{ن-۱}-۲^{ن-۱})\,لا^{ن-۱}$ ؛ $\frac{۱-لا^ن}{۱-لا} + \frac{۱-۳^ن لا^ن}{۱-۳لا} - \frac{۱-۲^ن لا^ن}{۱-۲لا}$

۱۰- ۸/۵ ؛ $(-۱)^{ن}$ + $\frac{۲^{۲ن-۳}}{۵}$ ؛ ۴/۵ $\{(-۱)^{ن} - ۱\}$ + ۱/۳۰ $(۲^{۲ن} - ۱)$

۱۱- $ع_{ن} - ۳ع_{ن-۱} + ۲ع_{ن-۲} - ع_{ن-۳} = ۰$ ؛ $ع_{ن} - ۴ع_{ن-۱} + ۶ع_{ن-۲}$ $- ۴ع_{ن-۳} + ع_{ن-۴} = ۰$

۱۲- $س_{ن} = س_{\infty} - ع$، جہاں ع = (ن + ۱) ویں رقم سے شروع کر کے لاتناہی تک حاصل جمع + بہ آسانی ثابت کیا جاسکتا ہے کہ یہ دفعہ ۳۲۵ کے نتیجہ سے مطابقت کرتا ہے۔

۱۳- $(۲ن+۱)^{۲}$ + ۲/۳ $(۲^{۲ن+۱} + ۱)$

امثلہ نمبری ۲۵ (ا) (صفحات ۱۲۹ تا ۱۳۱)

۱- ۲/۱ ، ۱۳/۶ ، ۱۵/۷ ، ۲۸/۱۳ ، ۳۲۳/۱۵۰ ، ۶۷۴/۳۱۳

۲- ۱/۲ ، ۲/۵ ، ۷/۱۷ ، ۹/۲۲ ، ۴۳/۱۰۵ ، ۹۵/۲۳۲ ، ۶۱۳/۱۴۹۷

۳- ۳/۱ ، ۱۰/۳ ، ۱۳/۴ ، ۳۶/۱۱ ، ۸۵/۲۶ ، ۱۲۱/۳۷ ، ۱۱۷۳/۳۵۹

۴- ۱ + ۱/۲+ ۱/۲+ ۱/۲+ ۱/۱+ ۱/۱+ ۱/۲+ ۱/۳ ؛ ۱۷/۱۲

۵- ۵ + ۱/۴+ ۱/۳+ ۱/۲+ ۱/۱+ ۱/۳ ؛ ۱۵۷/۳۰

۶- ۱/۳+ ۱/۳+ ۱/۳+ ۱/۳+ ۱/۳+ ۱/۳+ ۱/۳ ؛ ۳۳/۱۰۹

۷- ۱/۳+ ۱/۵+ ۱/۱+ ۱/۱+ ۱/۳+ ۱/۲+ ۱/۱+ ۱/۵ ؛ ۱۱/۴۵

۸- ۱/۲+ ۱/۱+ ۱/۲+ ۱/۲+ ۱/۱+ ۱/۳ ؛ ۷/۹

۹- $1 + \frac{1}{7+}\,\frac{1}{5+}\,\frac{1}{6+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{3}$ ؛ $\frac{254}{223}$ ۔

۱۰- $\frac{1}{3+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{6+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{10}$ ؛ $\frac{63}{208}$

۱۱- $4 + \frac{1}{3+}\,\frac{1}{6+}\,\frac{1}{3}$ ؛ $\frac{259}{60}$

۱۳- $\frac{1}{4}$ ، $\frac{7}{29}$ ، $\frac{8}{33}$ ، $\frac{39}{161}$ ، $\frac{47}{194}$

۱۶- $\text{ن} - 1 + \frac{1}{(\text{ن}+1)+}\,\frac{1}{(\text{ن}-1)+}\,\frac{1}{\text{ن}+1}$ ؛ اور پہلے تین مستدق

$\frac{\text{ن}-1}{1}$ ، $\frac{\text{ن}^2}{\text{ن}+1}$ ، $\frac{\text{ن}^3 - \text{ن}^2 + \text{ن} - 1}{\text{ن}^2}$ ہیں ۔

امثلہ نمبری ۲۵ (ب) (صفحات ۱۳۷ تا ۱۴۱)

۱- $\frac{1}{(203)^2}$ اور $\frac{1}{2(1250)^2}$ ۲- $\frac{151}{115}$

۴- $\frac{1}{\text{ا}+}\,\frac{1}{(\text{ا}+1)+}\,\frac{1}{(\text{ا}+2)+}\,\frac{1}{\text{ا}+3}$ ؛ $\frac{\text{ا}^2 + 3\text{ا} + 3}{\text{ا}^3 + 3\text{ا}^2 + 4\text{ا} + 2}$

امثلہ نمبری ۲۶ (صفحات ۱۵۲ تا ۱۵۴)

۱- لا = ۱۱۷ د + ۱۰۰ اور ما = ۷۷۵ د + ۱۰۹ ؛
لا = ۱۰۰ اور ما = ۱۰۹

۳- لا = ۵۱۹ د = ۷۳ اور ما = ۴۵۵ د − ۶۴ ؛
لا = ۴۴۶ اور ما = ۳۹۱

۳- لا = ۳۹۳ د + ۳۲۰ اور ما = ۴۳۶ د + ۳۵۵؛
لا = ۳۲۰ اور ما = ۳۵۵

۴- چار ۵- سات ۶- $\frac{۵}{۷}$، $\frac{۴}{۹}$

۷- $\frac{۵}{۱۲}$، $\frac{۳}{۸}$؛ $\frac{۱۱}{۱۲}$، $\frac{۷}{۸}$؛ یا $\frac{۱}{۸}$، $\frac{۱}{۱۲}$؛ $\frac{۵}{۸}$، $\frac{۷}{۱۲}$

۸- ۶ پونڈ ۱۳ شلنگ ۹- لا = ۹، ما = ۸، ی = ۳

۱۰- لا = ۵، ما = ۶، ی = ۷ ۱۱- لا = ۴، ما = ۲، ی = ۷

۱۲- لا = ۲، ما = ۹، ی = ۷

۱۳- لا = ۳، ۷، ۲، ۶، ۱؛ ما = ۱۱، ۴، ۸، ۱، ۵؛ ی = ۱، ۱، ۲، ۲، ۳

۱۴- لا = ۱، ۳، ۲ ما = ۵، ۱، ۳؛ ی = ۲، ۴، ۳

۱۵- ۲۸۰ د + ۹۳ ۱۶- ۱۸۱، ۴۱۲

۱۷- عشری ۲۴۸، سبعی ۵۰۳، تسعی ۳۰۵

۱۸- ا = ۱۱، ۱۰، ۹، ۸، ۶، ۴، ۳؛ ب = ۶۶، ۳۰، ۱۸، ۱۲، ۶، ۳، ۲

۱۹- کسی سرے سے شروع کر کے ایک سو ساتواں اور ایک سو چوتھا نشان۔

۲۰- پہلی دفعہ کے علاوہ ۵۰، ۴۱، ۳۵ دفعہ بجا۔

۲۱- ۴۲۵ ۲۲- ۸۹۹ ۲۳- ۱۸۲۹ اور ۱۳۶۳

امثلہ نمبری ۲۷ (ا) (صفحات ۱۵۸ تا ۱۶۰)

۱- ۱ + $\frac{۱}{+۱}$ $\frac{۱}{+۲}$ ......؛ ۳- ۲ + $\frac{۱}{+۴}$ ....؛ $\frac{۲۶}{۱۵}$؛ $\frac{۲۸۸۹}{۱۲۹۲}$

۳- $۱ + \frac{۱}{+۲}\ \frac{۱}{+۳} \ldots$ ؛ $\frac{۲۸۵}{۱۹۸}$ ۴- $۲ + \frac{۱}{+۱}\ \frac{۱}{+۴} \ldots$ ؛ $\frac{۹۹}{۳۵}$

۵- $۳ + \frac{۱}{+۳}\ \frac{۱}{+۶} \ldots$ ؛ $\frac{۳۹۷۰}{۱۱۹۷}$

۶- $۳ + \frac{۱}{+۱}\ \frac{۱}{+۱}\ \frac{۱}{+۱}\ \frac{۱}{+۱}\ \frac{۱}{+۶} \ldots$ ؛ $\frac{۱۱۹}{۳۳}$

۷- $۳ + \frac{۱}{+۱}\ \frac{۱}{+۲}\ \frac{۱}{+۱}\ \frac{۱}{+۶} \ldots$ ؛ $\frac{۱۱۶}{۳۱}$

۸- $۴ + \frac{۱}{+۱}\ \frac{۱}{+۲}\ \frac{۱}{+۴}\ \frac{۱}{+۲}\ \frac{۱}{+۱}\ \frac{۱}{+۸} \ldots$ ؛ $\frac{۱۹۷}{۴۲}$

۹- $۳ + \frac{۱}{+۲}\ \frac{۱}{+۶} \ldots$ ؛ $\frac{۱۳۵۱}{۳۹۰}$ ۱۰- $۵ + \frac{۱}{+۱}\ \frac{۱}{+۱}\ \frac{۱}{+۱}\ \frac{۱}{+۱۰} \ldots$ ؛ $\frac{۱۹۸}{۳۵}$

۱۱- $۶ + \frac{۱}{+۱}\ \frac{۱}{+۲}\ \frac{۱}{+۲}\ \frac{۱}{+۲}\ \frac{۱}{+۱}\ \frac{۱}{+۱۲}$ ؛ $\frac{۱۶۱}{۲۴}$

۱۲- $۱۲ + \frac{۱}{+۱}\ \frac{۱}{+۱}\ \frac{۱}{+۱}\ \frac{۱}{+۵}\ \frac{۱}{+۱}\ \frac{۱}{+۱}\ \frac{۱}{+۱}\ \frac{۱}{+۲۴}$ ؛ $\frac{۲۵۳}{۲۰}$

۱۳- $\frac{۱}{+۴}\ \frac{۱}{+۱}\ \frac{۱}{+۱}\ \frac{۱}{+۲}\ \frac{۱}{+۱}\ \frac{۱}{+۱}\ \frac{۱}{+۸} \ldots$ ؛ $\frac{۱۲}{۵۵}$

۱۴- $\frac{۱}{+۵}\ \frac{۱}{+۱}\ \frac{۱}{+۲}\ \frac{۱}{+۱}\ \frac{۱}{+۱۰} \ldots$ ؛ $\frac{۴۷}{۲۶۰}$ ۱۵- $۱ + \frac{۱}{+۱۰}\ \frac{۱}{+۲} \ldots$ ؛ $\frac{۵۲۹۱}{۴۸۳۰}$

۱۶- $\frac{۱}{+۱}\ \frac{۱}{+۳}\ \frac{۱}{+۱}\ \frac{۱}{+۱۶}\ \frac{۱}{+۱}\ \frac{۱}{+۳}\ \frac{۱}{+۲}\ \frac{۱}{+۳}\ \frac{۱}{+۱}\ \frac{۱}{+۱۶} \ldots$ ؛ $\frac{۲۸۰}{۳۵۱}$

۱۷- $\frac{۱}{(۶۵)^۲}$ اور $\frac{۱}{۳(۵۲۸)^۲}$ ۱۸- $\frac{۱}{(۱۹۱)^۲}$ اور $\frac{۱}{۲(۲۴۰)^۲}$

۱۹- $\frac{۴۰۳۰}{۴۰۱}$ ۲۰- $\frac{۱۶۷۷}{۴۴۳}$ ۲۱- $\frac{۱}{+۲}\ \frac{۱}{+۲}\ \frac{۱}{+۲} \ldots\ldots$

۲۲- $۴ + \frac{۱}{+۱}\ \frac{۱}{+۱}\ \frac{۱}{+۱}\ \frac{۱}{+۴} \ldots$ ۲۳- $۱ + \frac{۱}{+۲}\ \frac{۱}{+۳}\ \frac{۱}{+۱} \ldots\ldots$

۲۴- $۴ + \frac{۱}{+۲}\ \frac{۱}{+۳} \ldots$ ؛ $\frac{۱}{+۱}\ \frac{۱}{+۲}\ \frac{۱}{+۳}\ \frac{۱}{+۳}\ \frac{۱}{+۳} \ldots$ ۲۵- $\overline{۱۰۷}$

۲۶- $لا^۲ + ۳لا - ۳ = ۰$ کی مثبت اصل

۲۷- $۳لا^۲ - ۱۰لا - ۴ = ۰$ کی مثبت اصل ۲۸- ۴ $\overline{۲۷}$ ۳۰- $\frac{۱}{۳}$

امثلہ نمبری ۲۷ (ب) (صفحات ۱۷۰ تا ۱۷۳)

۱- $لا + \frac{۱}{۲لا +} \frac{۱}{۲لا +} \frac{۱}{۲لا +} \cdots$ ، $\frac{۸لا^{۴} + ۸لا^{۲} + ۱}{۸لا^{۳} + ۴لا}$

۲- $لا - ۱ + \frac{۱}{۲ +} \frac{۱}{۲(لا-۱) +} \frac{۱}{۲ +} \frac{۱}{۲(لا-۱) +} \cdots$ ؛ $\frac{۸لا^{۲} - ۸لا + ۱}{۸لا - ۴}$

۳- $لا - ۱ + \frac{۱}{۱ +} \frac{۱}{۲(لا-۱) +} \frac{۱}{۱ +} \frac{۱}{۲(لا-۱) +} \cdots$ ؛ $\frac{۲لا^{۲} - ۱}{۲لا}$

۴- $۱ + \frac{۱}{۲لا +} \frac{۱}{۲ +} \frac{۱}{۲لا +} \frac{۱}{۲ +} \cdots$ ؛ $\frac{۸لا^{۲} + ۸لا + ۱}{۸لا^{۲} + ۴لا}$

۵- $لا + \frac{۱}{ب +} \frac{۱}{۲لا +} \frac{۱}{ب +} \frac{۱}{۲لا +} \cdots$ ؛ $\frac{۲لا^{۲}ب^{۲} + ۴لاب + ۱}{۲لاب^{۲} + ۲ب}$

۶- $لا - ۱ + \frac{۱}{۱ +} \frac{۱}{۲(ن-۱) +} \frac{۱}{۱ +} \frac{۱}{۲(لا-۱) +} \cdots$ ؛ $\frac{۲لان - ۱}{۲ن}$

۷- $\frac{۴۳۲لا^{۵} + ۱۸۰لا^{۳} + ۱۵لا}{۱۴۴لا^{۴} + ۳۶لا^{۲} + ۱}$

امثلہ نمبری ۲۸- صفحات (۱۸۷ تا ۱۸۸)

۱- لا = ۷ یا ۱؛ ما = ۴؛ لا = ۷ یا ۵، ما = ۶ ۲- لا = ۲؛ ما = ۱

۳- لا = ۲، ما = ۱، ۱۱؛ لا = ۷، ما = ۹، ۱۹؛ لا = ۱۰، ما = ۱۸، ۲۲

۴- لا = ۲، ۳، ۶، ۱۱؛ ما = ۱۲، ۷، ۴، ۳ ۵- لا = ۳، ۲؛ ما = ۱، ۴

۶- لا = ۷۹، ۲۷، ۱۷، ۱۳، ۱۱، ۹؛ ما = ۱۵۷، ۵۱، ۲۹، ۱۹، ۱۳، ۳

۷- لا = ۱۵، ما = ۴ ۸- لا = ۱۷۰، ما = ۳۹

۹- لا = ۳۲، ما = ۵ ۱۰- لا = ۱۶۴، ما = ۲۱ ۱۱- لا = ۴، ما = ۱

۱۲- $۲لا = (۲ + \sqrt{۳})^{ن} + (۲ - \sqrt{۳})^{ن}$ ؛ $۲\sqrt{۳} \times ما = (۲ + \sqrt{۳})^{ن} - (۲ - \sqrt{۳})^{ن}$ جبکہ ن ایک صحیح عدد ہے۔

۱۳- ۲لا = (۲ + $\sqrt{۵}$)^{ن} + (۲ − $\sqrt{۵}$)^{ن} ؛ ۲$\sqrt{۵}$ × ما = (۲ + $\sqrt{۵}$)^{ن} − (۲ − $\sqrt{۵}$)^{ن}
جبکہ ن ایک جفت مثبت صحیح عدد ہے۔

۱۴- ۲لا = (۴ + $\sqrt{۱۷}$)^{ن} + (۴ − $\sqrt{۱۷}$)^{ن} ؛ ۲$\sqrt{۱۷}$ × ما = (۴ + $\sqrt{۱۷}$)^{ن} − (۴ − $\sqrt{۱۷}$)^{ن} جبکہ ن ایک طاق مثبت صحیح عدد ہے۔

سوالات ۱۵ تا ۱۷ اور ۱۹ اور ۲۰ کے جوابات مساوات کی دونوں طرفوں کے جزوِ ضربی کے طریقہ کے مطابق تغیر پذیر ہونگے۔

۱۵- لا = م^{۲} − ۳ن^{۲}، ما = م^{۲} − ۲م ن

۱۶- لا = −م^{۲} + ۲م ن + ن^{۲} ؛ ما = م^{۲} − ن^{۲}

۱۷- لا = ۲م ن، ما = ۵م^{۲} − ن^{۲}

۱۸- ۵۳، ۵۲، ۱۹؛ ۱۶، ۱۳؛ ۸؛ ۱۱، ۴

۱۹- م^{۲} − ن^{۲} ؛ ۲م ن ؛ م^{۲} + ن^{۲} ۲۰- م^{۲} − ن^{۲} ؛ ۲م ن + ن^{۲}

۲۱- دیوی دیال کی بیوی لچھمی ؛ متھرا داس کی کیسری ؛ رام گوپال کی بسنتی

امثلہ نمبری ۲۹ (ا) (صفحات ۲۰۶ تا ۲۰۷)

۱- $\frac{۱}{۴}$ن (ن + ۱)(ن + ۲)(ن + ۳)

۲- $\frac{۱}{۵}$ن (ن + ۱)(ن + ۲)(ن + ۳)(ن + ۴)

۳- $\frac{۱}{۱۲}$(۳ن − ۲)(۳ن + ۱)(۳ن + ۴)(۳ن + ۷) + $\frac{۵۶}{۱۲}$ =
$\frac{ن}{۴}$(۲۷ن^{۳} + ۹۰ن^{۲} + ۴۵ن − ۵۰)

۴- $\frac{ن}{۴}$(ن + ۱)(ن + ۶)(ن + ۷)

۵- $\frac{ن}{۴}$(ن + ۱)(ن + ۸)(ن + ۹)

۶- ن/(ن+۱) ؛ ۱ ۷- ن/(۳ن+۱) ؛ ۱/۳ ۸- ۱/۱۲ - ۱/(۴(۲ن+۱)(۲ن+۳)) ؛ ۱/۱۲

۹- ۱/۲۴ - ۱/(۶(۳ن+۱)(۳ن+۴)) ؛ ۱/۲۴ ۱۰- ۵/۴ - (۲ن+۵)/(۲(ن+۱)(ن+۲)) ؛ ۵/۴

۱۱- ۱/۶ - ۱/(ن+۳) + ۲/((ن+۳)(ن+۴)) ؛ ۱/۶

۱۲- ۳/۴ - ۲/(ن+۲) + ۱/(۲(ن+۱)(ن+۲)) ؛ ۳/۴

۱۳- ن/۱۰ (ن+۱)(ن+۲)(ن+۳)(۲ن+۳)

۱۴- ۱/۴ ن²(ن²-۱) ۱۵- ن/۱۰ (ن-۱)(ن+۱)(ن+۲)(۲ن+۱)

۱۶- ۱/۱۵ (ن+۱)(ن+۲)(۳ن³+۳۶ن²+۱۵۱ن+۲۴۰)-۳۲

۱۷- ((ن-۱)ن(ن+۱)(ن+۲))/(۶(۲ن+۱)) ۱۸- (ن(ن+۱)(ن+۲))/۳ - ن/(ن+۱)

۱۹- (ن(ن+۳))/۲ + ۳/۲ - ۲/(ن+۲) - ۱/((ن+۱)(ن+۲))

۲۰- ن + ۱ - ۱/(ن+۱)

امثلہ نمبری ۲۹ (ب) (صفحات ۲۲۵ تا ۲۲۷)

۱- ۳ن² + ن ؛ ن(ن+۱)² ۲- ۵ن² + ۳ن ؛ ۱/۲ ن(ن+۱)(۵ن+۷)

۳- ن²(ن+۱)² ؛ ۱/۱۲ ن(ن+۱)(ن+۲)(۳ن+۱)

۴- ۴ن²(ن-۳) ؛ - ن(ن+۱)(ن² - ۳ن - ۲)

۵- ن(ن+۱)(ن+۲)(ن+۳) ؛ ۱/۲۰ ن(ن+۱)(ن+۲)(ن+۳)(۴ن+۱۱)

۶- $\frac{1+\text{لا}^2}{(1-\text{لا})^3}$ ۷- $\frac{1-\text{لا}+6\text{لا}^2-2\text{لا}^3}{(1-\text{لا})^3}$ ۸- $\frac{2-\text{لا}+\text{لا}^2}{(1-\text{لا})^3}$

۹- $\frac{1-\text{لا}}{(1+\text{لا})^2}$ ۱۰- $\frac{1+11\text{لا}+11\text{لا}^2+\text{لا}^3}{(1-\text{لا})^5}$ ۱۱- $\frac{9}{4}$

۱۲- $\frac{25}{54}$ ۱۳- $3\times 2^{\text{ن}}+\text{ن}+2$ ؛ $6(2^{\text{ن}}-1)+\frac{\text{ن}(\text{ن}+5)}{2}$

۱۴- $\text{ن}^3-(\text{ن}+1)^2$ ؛ $\frac{\text{ن}}{12}(3\text{ن}^3+2\text{ن}^2-15\text{ن}-26)$

۱۵- $3^{\text{ن}-1}+\text{ن}$ ؛ $\frac{3^{\text{ن}}+\text{ن}^2+\text{ن}-1}{2}$

۱۶- $2^{\text{ن}+1}-\text{ن}^2-2\text{ن}$ ؛ $2^{\text{ن}+2}-4-\frac{1}{6}\text{ن}(\text{ن}+1)(2\text{ن}+7)$

۱۷- $3^{\text{ن}}-1+\frac{1}{2}\text{ن}(\text{ن}+3)$ ؛ $\frac{1}{2}(3^{\text{ن}+1}-3)+\frac{\text{ن}(\text{ن}+1)(\text{ن}+5)}{6}$

۱۸- $\frac{1-\text{لا}^{\text{ن}}}{(1-\text{لا})^2}-\frac{\text{ن}\,\text{لا}^{\text{ن}}}{1-\text{لا}}$ ۱۹- $\frac{1-\text{لا}^{\text{ن}}}{(1-\text{لا})^3}-\frac{\text{ن}\,\text{لا}^{\text{ن}}}{(1-\text{لا})^2}-\frac{\text{ن}(\text{ن}+1)\text{لا}^{\text{ن}}}{2(1-\text{لا})}$

۲۰- $1-\frac{1}{\text{ن}+1}\times\frac{1}{2^{\text{ن}}}$ ۲۱- $\frac{\text{ن}-1}{\text{ن}+2}\times\frac{4^{\text{ن}+1}}{3}+\frac{2}{3}$

۲۲- $\frac{\text{ن}(\text{ن}+1)(3\text{ن}^3+27\text{ن}^2+58\text{ن}+2)}{15}$

۲۳- $\frac{\text{ن}(\text{ن}+1)(12\text{ن}^3+33\text{ن}^2+37\text{ن}+8)}{60}$

۲۴- $\frac{\text{ن}(\text{ن}+1)(9\text{ن}^2+13\text{ن}+8)}{12}$

۲۵- $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{1\times3\times5\times7\cdots(2\text{ن}+1)}$ ۲۶- $1-\frac{2^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+2}$

۲۷- $(\text{ن}^2-\text{ن}+4)2^{\text{ن}}-4$ ۲۸- $(\text{ن}-1)3^{\text{ن}+1}+3$

۲۹- $\frac{1}{2}-\frac{1\times3\times5\cdots(2\text{ن}+1)}{2\times4\times6\cdots(2\text{ن}+2)}$ ۳۰- $\frac{\text{ن}}{\text{ن}+1}\times 2^{\text{ن}}$

۳۱- $\frac{۱}{۴}$ - $\frac{۱}{۲(ن+۱)(ن+۲)} \times \frac{۱}{۳^{ن}}$ ۳۲- $\frac{۱}{۲}$ - $\frac{ن+۱}{ن+۲}$

۳۳-۱- $\frac{ن+۴}{(ن+۱)(ن+۲)} \times \frac{۱}{۲^{ن+۱}}$

امثلہ نمبری ۲۹ (ج) (صفحات ۲۳۴ تا ۲۳۹)

۱- $\frac{۱}{۲}$ $(و^{لا} - و^{-لا})$ - لا ۲- ۱ + $\frac{۱ - لا}{لا}$ لوک (۱ - لا)

۳- $\frac{۱}{۲}$ $(و^{لا} - و^{-لا} - خ و^{خ لا} + خ و^{-خ لا})$

۴- $\frac{۱}{(ر-۲)\,\lfloor ر-۱}$ ۵- (۱ + لا) $و^{لا}$ ۶- $\frac{(ف+ق)^{ر}}{\lfloor ر}$

۷- ۱ ۸- ن (۲ن - ۱) ۹- صفر ۱۰- ۴

۱۱- $لوک_{و}$ ۲- $\frac{۱}{۲}$ ۱۲- ۳ (و - ۱) ۱۳- $و^{لا}$ - لوک (۱ + لا)

۱۴- (۱) $\frac{ن^{۷}}{۷} + \frac{ن^{۶}}{۲} + \frac{ن^{۵}}{۲} - \frac{ن^{۳}}{۶} + \frac{ن}{۴۲}$

(۲) $\frac{ن^{۸}}{۸} + \frac{ن^{۷}}{۲} + \frac{۷ن^{۶}}{۱۲} - \frac{۷ن^{۴}}{۲۴} + \frac{ن^{۲}}{۱۲}$

۲۵- ۱۵و ۱۷- (۱) ن + ۱

۱۹- (۱) $\frac{۱}{۲}$ $(۱ - \frac{۱}{(ن+۱)(ن+۲)})$ ؛ (۲) ۳ - $\frac{۲ + (-۱)^{ن}}{ن + ۱}$

۲۰- $\frac{(۱ + لا)^{۲}}{۲ لا^{۲}}$ لوک (۱ + لا) - $\frac{۳ لا + ۲}{۴ لا}$

۲۱- ن (ن + ۱) $۲^{ن-۳}$

۲۲- (۱) $\frac{۱}{۲}$ $\left\{۱ + \frac{(-۱)^{ن+۱}}{۲^{ن+۱} + (-۱)^{ن+۱}}\right\}$ (۲) $\frac{۱}{۲}$ $\left\{\frac{۳}{۲} + (-۱)^{ن-۱} \frac{۲ن + ۳}{(ن+۱)(ن+۲)}\right\}$

امثلہ نمبری ۳۰ (ا) (صفحات ۲۵۲ تا ۲۵۵)

۱- ۳، ۶، ۱۵، ۴۲ ۳- ۱۶۱۷، ۱۸۰، ۱۸۵۹ ۶- ۴۸
۷- ۲۳ ۳۳- ۸۹۸۷

امثلہ نمبری ۳۰ (ب) (صفحات ۲۶۸ تا ۲۷۱)

۴- لا = ۱۳۹ د + ۶۱ جہاں د ایک صحیح عدد ہے۔

امثلہ نمبری ۳۱ (ا) (صفحات ۲۸۶ تا ۲۸۹)

۳- ۱ + $\frac{۱}{-لا}$ $\frac{۱}{+۴}$ $\frac{۱}{لا}$ ۱۸- ۱؛ یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ $ل_{ن}$ = ۱ + $ق_{ن}$

امثلہ نمبری ۳۲ (ا) (صفحات ۳۰۰ تا ۳۰۱)

۱- (۱) $\frac{۱}{۹}$؛ (۲) $\frac{۵}{۳۶}$ ۲- $\frac{۸}{۶۶۳}$ ۳- $\frac{۱}{۵۶}$ ۴- $\frac{۳}{۸}$
۵- ۲ تا ۳ ۶- $\frac{۴}{۲۷۰۷۲۵}$ ۸- ۴۳ تا ۴۴ ۹- ۳۶ : ۳۰ : ۲۵
۱۰- $\frac{۲۱۹۷}{۲۰۸۲۵}$ ۱۱- ۹۵۲ تا ۷۱۵ ۱۴- $\frac{۱}{۶}$ ۱۵- $\frac{۲}{۷}$
۱۶- $\frac{۱۱}{۴۱۶۵}$ ۱۷- $\frac{ن\,(ن-۱)}{(م+ن)\,(م+ن-۱)}$

امثلہ نمبری ۳۲ (ب) (صفحات ۳۱۲ تا ۳۱۵)

۱- $\frac{۵}{۳۶}$ ۲- $\frac{۱۶}{۵۵۲۵}$ ۳- $\frac{۵۲}{۷۷}$ ۴- $\frac{۱۶}{۲۱}$ ۵- $\frac{۸}{۱۵}$
۶- $\frac{۷۲}{۲۸۹}$ ۷- (۱) $\frac{۲۱۹۷}{۲۰۸۲۵}$؛ (۲) $\frac{۲۸۱۶}{۴۱۶۵}$ ۸- $\frac{۴۶۵۱}{۷۷۷۶}$

۹- $\frac{۲۰۹}{۳۴۳}$ ۱۰- $\frac{۱}{۷}$ ۱۱- $\frac{۹۱}{۲۱۶}$ ۱۳- $\frac{۱۰}{۱۹}$ ۱۴- $\frac{۶۳}{۲۵۶}$

۱۵- $\frac{۱}{۳۲}$ ۱۶- $\frac{۱۶}{۳۷}$، $\frac{۱۲}{۳۷}$، $\frac{۹}{۳۷}$ ۱۷- $\frac{۲۲}{۳۵}$، $\frac{۱۳}{۳۵}$

۱۸- ن - ۳ تا ۲ ۱۹- ۱۳ تا ۵ ۲۰- $\frac{۴۵۹۲۷}{۵۰۰۰۰}$

امثلہ نمبری ۳۲ (ج) صفحات ۳۲۳ تا ۳۲۶

۱- $\frac{۲۱۳۳}{۳۱۲۵}$ ۲- $\frac{۵}{۱۶}$ ۳- $\frac{۴}{۹}$ ۴- فلارِن ۵- $\frac{۱}{۲}$

۶- ۱۷ شلنگ $۲\frac{۲}{۵}$ پنس ۷- $\frac{۴}{۶۳}$ ۸- $\frac{۷}{۲۷}$ ۹- ۱۱ تا ۵

۱۰- $\frac{۱}{۸}$ ۱۱- ا ۵ پونڈ؛ ب ۱۱ پونڈ ۱۲- $\frac{۲۰}{۲۷}$ ۱۳- $۴\frac{۴}{۵}$ شلنگ

۱۴- (۱) $\frac{۲۵۰}{۷۷۷۶}$؛ (۲) $\frac{۲۷۶}{۷۷۷۶}$ ۱۵- ۴ پنس ۱۶- $\frac{۳}{۴}$

۱۷- مر + $\frac{۱}{۲}$ م

امثلہ نمبری ۳۲ (د) صفحات ۳۳۸ تا ۳۴۱

۱- $\frac{۲}{۵}$ ۲- $\frac{۱}{۳۵}$ ۳- $\frac{۱۲}{۱۷}$ ۴- ب $\frac{۲}{۵}$؛ ج $\frac{۴}{۱۵}$

۵- $\frac{۲}{ن(ن+۱)}$ ۶- $\frac{۳۲}{۴۱}$ ۷- $\frac{۳۷۷}{۵۵۰}$ ۸- ۲ شلنگ ۳ پنس

۹- $\frac{۱}{۵}$ ۱۰- $\frac{۱}{۲}$ ۱۱- $\frac{۴۰}{۴۱}$ ۱۲- $\frac{۱۱}{۵۰}$ ۱۳- ۱ پونڈ

۱۴- (۱) $\frac{۳}{۵}$؛ (۲) $\frac{۷}{۸}$ ۱۵- ۸ پونڈ ۱۷- $\frac{ن-۱}{م ن-۱}$، $\frac{ن-۱}{م ن-(ن-۱)}$

۱۸- $\frac{۱۳}{۱۴}$

امثلہ نمبری ۳۲ (ل) (صفحات ۳۵۰ تا ۳۵۶)

۱- ۷ تا ۵ ۲- $\frac{۱}{۱۲۶}$ ۳- $\frac{۱۳۳۹۳}{۱۲۵۰۰}$ ۵- $\frac{۲۷۵}{۵۰۴}$

۶- ۱ : $\frac{۵}{۶}$: $(\frac{۵}{۶})^{۲}$: $(\frac{۵}{۶})^{۳}$: $(\frac{۵}{۶})^{۴}$ ۷- $\frac{۱۶}{۲۱}$

۸- ۶؛ ہر ایک $\frac{۱}{۶}$ کے برابر ۹- $\frac{۱۳}{۲۸}$ ۱۰- $\frac{۳۴۳}{۱۲۹۵}$ ۱۱- ۱۱ تا ۵

۱۳- ا $\frac{۱۶۹}{۳۲۴}$ ؛ ب $\frac{۱۵۵}{۳۲۴}$ ۱۴- $\frac{۱}{۷}$ ، $\frac{۴}{۲۱}$ ۱۶- $\frac{۲۵}{۲۱۶}$

۱۷- $\frac{۱۴۹}{۲۴۰۱}$ ۱۸- $\frac{۳۳}{۱۰۰۰}$ ، $\frac{۱}{۶۰}$ ۲۰- ایک گنی Guinea

۲۲- $\frac{۱۴۰}{۱۴۱}$ ۲۳- $\frac{ن(ن+۱)}{۲}$ شلنگ ۲۶- ۱۵ تا ۱

۲۸- $\frac{۱}{۴}$ ۲۹- $\frac{۱}{۴}$ ۳۰- $\frac{۱۲۶۵}{۱۲۸۶}$ ؛ $\frac{۵۰۸۷}{۵۱۴۴}$ پونڈ

۳۱- $(\frac{ا-ب}{ا})^{۲}$ ۳۲- اگر ب > $\frac{ا}{۲}$ تو احتمال ۱-۳ $(\frac{ا-ب}{ا})^{۲}$ ہے

اگر ب < $\frac{ا}{۲}$ تو احتمال $(\frac{۳ب-ا}{ا})^{۲}$ ہے۔

امثلہ نمبری ۳۳ (ا) (صفحات ۳۷۲ تا ۳۷۶)

۱- ۷ ۲- صفر ۳- ۱

۴- اب ج + ۲ ف گ ھ - ا$ف^{۲}$ - ب$گ^{۲}$ - ج$ھ^{۲}$

۵- ۱ + $لا^{۲}$ + $ما^{۲}$ + $ی^{۲}$ ۶- لا ما ۷- صفر ۸- ۴ اب ج

۹- صفر ۱۰- ۳ ۱۱- ۳ اب ج - $ا^{۳}$ - $ب^{۳}$ - $ج^{۳}$ = ۰

۱۳- (۱) لا = ا یا ب؛ (۲) لا = ۴

۲۰- | ب۲ + ج۲　ا ب　ا ج |
| ب ا　ج۲ + ا۲　ب ج |
| ج ا　ج ب　ا۲ + ب۲ |

۲۲- لہ۳ (لہ + ا۲ + ب۲ + ج۲)۳

۲۶- مقطعہ | ا۲　ا　۱ | × | ۱　-۲لا　لا۲ | کے برابر ہے
| ب۲　ب　۱ |　| ۱　-۲ما　ما۲ |
| ج۲　ج　۱ |　| ۱　-۲ی　ی۲ |

۲۷- | ا　جَ　بَ |
| جَ　ب　اَ |
| بَ　اَ　ج | = ۰

۲۸- | ا　جَ　بَ |
| جَ　ب　اَ |
| بَ　اَ　ج | ÷ | ا　جَ　بَ　عد |
| جَ　ب　اَ　بد |
| بَ　اَ　ج　جد |
| عد　بد　جد ۰ |

امثلہ نمبری ۳۳ (ب) (صفحات ۳۸۴-۳۸۷)

۱- ا　۲- صفر؛ جمع کرو پہلی اور دوسری قطار اور تیسری اور چوتھی قطار -

۳- (ا + ۳) (ا - ۱)۳　۴- ا۲ + ب۲ + ج۲ - ۲ ب ج - ۲ ج ا - ۲ ا ب

۵- ۶؛ پہلے ستون میں سے تیسرا ستون ۳ دفعہ تفریق کرو، دوسرے ستون میں سے تیسرا ستون ۲ دفعہ تفریق کرو، اور چوتھے میں سے تیسرا چار دفعہ تفریق کرو۔

۶- ا ب ج د (۱ + ۱/ا + ۱/ب + ۱/ج + ۱/د)

۷- -(لا + ما + ی) (ما + ی - لا) (ی + لا - ما) (لا + ما - ی)

۸- (ا لا - ب ما + ج ی)۲　۹- ا۳

۱۲- لا = (ک - ب) (ک - ج) / (ا - ب) (ا - ج) ؛ وغیرہ ۱۳- لا = ک (ک - ب) (ک - ج) / ا (ا - ب) (ا - ج) وغیرہ

۱۴- لا = (ک - ب) (ک - ج) (ک - د) / (ا - ب) (ا - ج) (ا - د) ؛ وغیرہ

امثلہ نمبری ۳۴ (ا) (صفحات ۵۴۱ تا ۵۴۰)

۱- -۱۰۲ ۲- ۳ ا + ب = ۲۷

۳- لا^۳ - ۲ لا^۲ + لا + ۱ ؛ - ۱۵ لا + ۱۱

۴- ا = ۳ ۵- لا^-۴ + ۵ لا^-۵ + ۱۸ لا^-۶ + ۴۵ لا^-۷ ؛
۱۴۷ لا^-۴ - ۳۵۶ لا^-۵ + ۹۰ لا^-۶ + ۴۳۲ لا^-۷

۶- (ب - ج) (ج - ا) (ا - ب) (ا + ب + ج)

۷- - (ب - ج) (ج - ا) (ا - ب) (ب + ج) (ج + ا) (ا + ب)

۸- ۲۴ ا ب ج ۹- (ب + ج) (ج + ا) (ا + ب)

۱۰- (ب - ج) (ج - ا) (ا - ب) (ا^۲ + ب^۲ + ج^۲ + ب ج + ج ا + ا ب)

۱۱- ۳ ا ب ج (ب + ج) (ج + ا) (ا + ب)

۱۲- ۱۲ ا ب ج (ا + ب + ج) ۱۳- ۸۰ ا ب ج (ا^۲ + ب^۲ + ج^۲)

۱۴- ۳ (ب - ج) (ج - ا) (ا - ب) (لا - ا) (لا - ب) (لا - ج)

۲۸- لا / (لا - ا) (لا - ب) (لا - ج) ۲۹- ۲

۳۰- (ف - ل) (ق - ل) / ((ا + ل) (ب + ل) (ج + ل))　۳۱- -۱　۳۲- ا + ب + ج + د

امثلہ نمبری ۳۴ (ب) (صفحات ۴۰۸ تا ۴۱۰)

۵ صفر　۷- ل = ا لا + ب ما + ا ما^{۲} ما = ب لا - ا ما

۲۸- (ا^{۲} + ب ج) (ب^{۲} + ج ا) (ج^{۲} + ا ب)

امثلہ نمبری ۳۴ (ج) (صفحات ۴۱۷ تا ۴۱۹)

۱- لا^{۳} + لا ما^{۲} + ا ما^{۲} = ۰　۲- لا + ا = ۰　۳- لا^{۲} + ما^{۲} = ا^{۲}

۴- ما^{۲} = ا (لا - ۳ ا)　۵- ا^{۲} - ا^{۳} = ۱　۶- لا^{۲} + ما^{۲} = ۲ ا^{۲}

۷- ب^{۲} ج^{۲} + ج^{۲} ا^{۲} + ا^{۲} ب^{۲} = ا^{۲} ب^{۲} ج^{۲} د^{۲}

۸- ما^{۲} - ۴ ا لا = ک^{۲} (لا + ا)^{۲}　۹- ا^{۳} - ۴ ا ج^{۳} + ۳ ب^{۴} = ۰

۱۰- ا^{۴} - ۲ ا^{۲} ب^{۲} - ب^{۴} + ۲ ج^{۴} = ۰

۱۱- ا / (۱ + ا) + ب / (۱ + ب) + ج / (۱ + ج) + د / (۱ + د) = ۱

۱۲- ۵ ا^{۲} ب^{۳} = ۶ ج^{۵}　۱۳- ا ب = ۱ + ج

۱۴- ا^{۳} + ب^{۳} + ج^{۳} + ا ب ج = ۰　۱۵- (ا + ب)$^{\frac{۲}{۳}}$ - (ا - ب)$^{\frac{۲}{۳}}$ = ۴ ج$^{\frac{۲}{۳}}$

۱۶- ا^{۲} + ب^{۲} + ج^{۲} ± ۲ ا ب ج = ۱　۱۷- ا ب ج = (۴ - ا - ب - ج)^{۲}

۱۸- ا^{۲} - ۴ ا ب ج + ا ج^{۳} + ۴ ب^{۳} - ب^{۲} ج^{۲} = ۰

۲۰- ج^{۲} (ا + ب - ۱)^{۲} - ج (ا + ب - ۱) (ا^{۲} - ۲ ا ب + ب^{۲} - ا - ب)
+ ا ب = ۰

۲۲- ۱ / ((ا - ب) ج ر + (ا - ج) ب ق) + ۱ / ((ب - ج) ا ق + (ب - ا) ج ر)
+ ۱ / ((ج - ا) ب ق + (ج - ب) ا ف) = ۱ / (ب ج ق ر + ج ا ر ف + ا ب ف ق)

۲۳- | اب' - ا'ب اج' - ا'ج اد' - ا'د |
| اج' - ا'ج اد' - ا'د + ب ج' = ب' ج ب د' - ب' د |
| اد' - ا'د ب د' + ب' د ج د' - ج' د | = ٠

امثلہ نمبری ۳۵ (الف) (صفحات ۴۲۷-۴۲۸)

۱- ۶لا^{4} - ۱۳لا^{3} - ۱۲لا^{2} + ۳۹لا - ۱۸ = ٠ ۲- لا^{6} + ۲لا^{5} - ۱۱لا^{4} - ۱۲لا^{3} + ۳۶لا^{2} = ٠

۳- لا^{6} - ۵لا^{5} - ۸لا^{4} + ۴۰لا^{3} + ۱۶لا^{2} - ۸۰لا = ٠

۴- لا^{4} - ۲(ا^{2} + ب^{2}) لا^{2} + (ا^{2} - ب^{2})^{2} ۵- ۱، ۳، ۵، ۷

۶- $\frac{۳}{۲}$، -$\frac{۳}{۲}$، -۴ ۷- $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۱}{۲}$، -۶ ۸- ۶، ۲، $\frac{۲}{۳}$

۹- -$\frac{۳}{۲}$، -۲، ۴ ۱۰- -$\frac{۳}{۲}$، -$\frac{۳}{۴}$، $\frac{۱}{۳}$

۱۱- ± $\sqrt{۳}$، $\frac{۳}{۴}$، -$\frac{۱}{۲}$ ۱۲- $\frac{۸}{۹}$، -$\frac{۲}{۳}$، $\frac{۱}{۲}$

۱۳- $\frac{۱}{۴}$، $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۳}{۴}$ ۱۴- $\frac{۲}{۳}$، $\frac{۳}{۲}$، ۱ ± $\sqrt{۲}$ ۱۵- -۴، -۱، ۲، ۵

۱۶- $\frac{۸}{۹}$، $\frac{۴}{۳}$، ۲، ۳ ۱۷- -$\frac{۴}{۳}$، -$\frac{۳}{۲}$، -$\frac{۵}{۳}$

۱۸- (۱) $\frac{ق^{2} - ۲ف ر}{ر^{2}}$ ؛ (۲) $\frac{ف^{2} - ۲ق}{ر^{2}}$

۱۹- (۱) -۶ق ؛ (۲) $\frac{ق}{ر}$ ۲۰- -۲ق، -۳ر ۲۱- ۲ق^{2}

امثلہ نمبری ۳۵ (ب) (صفحات ۴۳۳ تا ۴۳۵)

۱- ۳، -$\frac{۲}{۳}$، $\frac{۱ \pm \sqrt{-۳}}{۲}$ ۲- -$\frac{۳}{۲}$، -$\frac{۱}{۲}$، ۲ ± $\sqrt{۳}$

۳- -۱ ± $\sqrt{۲}$، -۱ ± $\sqrt{-۱}$ ۴- ± $\sqrt{-۱}$، -۲ ± $\sqrt{-۱}$

۵- -۱، ± $\sqrt{۳}$ ، ۱ ± ۲$\sqrt{-۱}$ ۶- لا^{۴} - ۲لا^{۲} + ۲۵ = ۰

۷- لا^{۴} - ۸لا^{۲} + ۳۶ = ۰ ۸- لا^{۴} + ۱۶ = ۰

۹- لا^{۴} - ۱۰لا^{۲} + ۱ = ۰ ۱۰- لا^{۴} - ۱۰لا^{۳} - ۱۹لا^{۲} + ۴۸۰لا - ۱۳۹۲ = ۰

۱۱- لا^{۴} - ۶لا^{۳} + ۱۸لا^{۲} - ۲۶لا + ۲۱ = ۰

۱۲- لا^{۸} - ۱۶لا^{۶} + ۸۸لا^{۴} + ۱۹۲لا^{۲} + ۱۴۴ = ۰

۱۳- ایک مثبت، ایک منفی، دو خیالی [مقابلہ کرو دفعہ ۵۵۴]

۱۵- ایک مثبت، ایک منفی، کم از کم چار خیالی [مقابلہ کرو دفعہ ۵۵۴]

۱۶- چھ ۱۷- (۱) ف ق = ر (۲) ف^{۳}ر = ق^{۳}

۲۰- ق^{۲} - ۲ف ر ۲۱- ف ق - ر ۲۲- $\frac{\text{ف ق}}{\text{ر}}$ - ۳

۲۳- ف ق - ۳ر ۲۴- ف ر - ۴س

۲۵- ف^{۴} - ۴ف^{۲}ق + ۲ق^{۲} + ۴ف ر - ۴س

امثلہ نمبری ۳۵ (ج) (۴۴۸ تا ۴۵۰)

۱- لا^{۴} - ۶لا^{۳} + ۱۵لا^{۲} - ۱۲لا + ۱ ۲- لا^{۴} - ۳۷لا^{۲} - ۱۲۳لا - ۱۱۰

۳- ۲لا^{۴} + ۸لا^{۳} - لا^{۲} - ۸لا - ۲۰ ۴- لا^{۴} - ۲۴لا^{۲} - ۱

۵- ۱۶ا لا ھ (لا^{۶} + ۷لا^{۴}ھ^{۲} + ۷لا^{۲}ھ^{۴} + ھ^{۶}) + ۲ب ھ (۵لا^{۴} + ۱۰لا^{۲}ھ^{۲} + ھ^{۴})
+ ۲ج ھ

۱۰- ۲، ۲، -۱، -۳ ۱۱- ۱، ۱، ۱، ۳ ۱۲- ۳، ۳، ۳، ۲، ۲

۱۳- ۲، $\frac{۱ \pm \sqrt{-۳}}{۲}$ ، $\frac{۱ \pm \sqrt{-۳}}{۲}$

۱۴- $\frac{۱}{۲}$ ، $\frac{۱}{۲}$ ، −۲   ۱۵- ۱، ۱، −۱، −۱، ۲

۱۶- $\pm\sqrt{۳}$ ، $\pm\sqrt{۳}$ ، $۱ \pm \sqrt{-۱}$ ۱۷- لا، لا، −لا، ب

۱۸- $\pm\sqrt{\frac{۳}{۲}}$ ، $\frac{۱ \pm \sqrt{-۷}}{۲}$ ؛ $\pm\sqrt{\frac{۳}{۲}}$ ، $\frac{۱ \pm \sqrt{-۲۳}}{۴}$

۱۹- ۰، ۱، $-\frac{۳}{۲}$ ، $-\frac{۵}{۲}$ ؛ ۰، ۱، $-\frac{۳}{۲}$ ، $-\frac{۵}{۲}$

۲۰- ن ر$^{ن-۲}$ = ۴ ف^{ن} (ن - ۲)$^{ن-۲}$

۲۲- (۱) −۲؛ (۲) −۱   ۲۷- ۵   ۲۸- ۹۹، ۷۹۵

امثلہ نمبری ۳۵ (د) (صفحات ۴۶۱ تا ۴۶۳)

۱- ما^{۳} − ۲۴ما^{۲} + ۹ ما − ۲۴ = ۰

۲- ما^{۴} − ۵ ما^{۳} + ۳ ما^{۲} − ۹ ما + ۲۷ = ۰

۳- ۱، −۲، $-\frac{۱}{۲}$ ۴- $۳ \pm ۲\sqrt{۲}$ ، $۲ \pm \sqrt{۳}$

۵- ۱، $\frac{۱ \pm \sqrt{-۳}}{۲}$ ، $\frac{۳ \pm \sqrt{۵}}{۲}$ ۶- ۲، ۲، $\frac{۱}{۲}$ ، $\frac{۱}{۲}$ ، $\frac{۱}{۲}(۱ \pm \sqrt{-۳})$

۷- ۴، ۲، $\frac{۴}{۳}$ ۸- ۶، ۳، ۲   ۱۰- $\frac{۱}{۴}$ ، ۱، $-\frac{۱}{۲}$ ، $-\frac{۱}{۵}$

۱۱- ما^{۳} − ۲ما + ۱ = ۰   ۱۲- ما^{۴} − ۴ما^{۲} + ۱ = ۰

۱۳- ما^{۵} − ۷ما^{۳} + ۱۲ما^{۲} − ۷ما = ۰

۱۴- ما^{۵} − ۶۰ما^{۴} − ۳۲۰ما^{۳} − ۷۱۷ما^{۲} − ۳۷۷ما − ۴۲ = ۰

۱۵- ما^{۳} − $\frac{۹ما^{۲}}{۲}$ + $\frac{۱۳ما}{۲}$ − $\frac{۱۵}{۴}$ = ۰

۱۶- ما^{۵} + ۱۱ما^{۴} + ۴۲ما^{۳} + ۷۵ما^{۲} - ۱۳ما - ۶۰ = ۰

۱۷- ما^{۳} - ۸ما^{۲} + ۱۹ما - ۱۵ = ۰　۱۸- ما^{۴} + ۳ما^{۳} + ۴ما^{۲} + ۳ما + ۱ = ۰

۱۹- ما^{۳} + ۳۳ما^{۲} + ۱۲ما + ۸ = ۰　۲۰- رما^{۳} + ک ق ما^{۲} + ک^{۳} = ۰

۲۱- ما^{۳} - ق^{۲}ما^{۲} - ۲ق ر ما - ر^{۲} = ۰　۲۲- رما^{۳} - ق ما^{۲} - ۱ = ۰

۲۳- رما^{۳} + ق (۱-ر) ما^{۲} + (۱-ر)^{۳} = ۰　۲۴- ما^{۳} - ۲ق ما^{۲} + ق^{۲}ما + ر^{۲} = ۰

۲۵- ما^{۳} + ۳ رما^{۲} + (ق^{۳} + ۳ر^{۲}) ما + ر^{۲} = ۰

۲۶- ر^{۳}ما^{۳} + ۳ر^{۲}ما^{۲} + (۳ر^{۲} + ق^{۳}) رما + ر (ر^{۲} + ۲ق^{۳}) = ۰

۲۸- ± ۱، ± ۲، ۵

امثلہ نمبری ۳۵ (ع) (صفحات ۴۷۶ تا ۴۷۸)

۱- ۵، $\frac{-۵ \pm \sqrt{-۳}}{۲}$

۲- ۱۰، -۵ ± ۷$\sqrt{-۳}$

۳- ۴، -۲ ± ۵$\sqrt{-۳}$

۴- -۶، ۳ ± ۴$\sqrt{-۳}$

۵- -$\frac{۱}{۴}$، $\frac{۲ \pm \sqrt{-۳}}{۷}$

۶- ۱۱، ۱۱، ۷

۷- -$\frac{۱}{۲}$، $\frac{-۱ \pm \sqrt{-۳}}{۲}$

۹- ۴، -۱، -$\frac{۱}{۲}$ (۳ ± $\sqrt{-۳۱}$)

۱۰- ۴، -۲، -۱ ± $\sqrt{-۱}$

۱۱- ± ۱، -۴ ± $\sqrt{۶}$

۱۲- ۱، ۲، -۲، -۳

۱۳- ۱ ± $\sqrt{۲}$، -۱ ± $\sqrt{-۱}$

۱۴- ۱، -۳، ۲ ± $\sqrt{۵}$

۱۵- ۲، ۲، $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۱}{۲}$

۱۶- ۱، ۴ ± √۱۵ ، - ۱۷ (۳ ± √۵)/۲ ، -۱، -۴، -۴، -۴، ۳

۱۸- ق^{۳} + ۸ ر^{۲} = ۰ ؛ ۳/۲ ، (-۳ ± ۳ √۵)/۴

۲۲- -۲ ± √۶ ، ± √۲ ، ۲ ± √۳

۲۳- س^{۳} ما^{۴} + ق س (۱ - س)^{۲} ما^{۲} + ر (۱ - س)^{۳} ما + (۱ - س)^{۴} = ۰

۲۵- ۲ ± √۳ ۲۶- (۵ ± √۱۳)/۲

۲۸- لا^{۴} - ۸ لا^{۳} + ۲۱ لا^{۲} - ۲۰ لا + ۵ = (لا^{۲} - ۵ لا + ۵) (لا^{۲} - ۳ لا + ۱)

اگر لا = ۴ - ما ہو تو جملات لا^{۲} - ۵ لا + ۵ اور لا^{۲} - ۳ لا + ۱ علی الترتیب ما^{۲} - ۳ ما + ۱ اور ما^{۲} - ۵ ما + ۵ بن جاتے ہیں۔ اس طرح ہم نے صرف اصل مساوات کو پھر حاصل کر لیا ہے۔

متفرق مثالیں (صفحات ۴۷۹ تا ۵۳۴)

۲- ۶، ۸ ۳- آٹھ ۴- (۱) ۱ ± √۵ ؛ ۱ ± ۲ √۵

(۲) لا = ۱، ما = ۳، ی = -۵ ؛

یا لا = -۱، ما = -۳ ؛ ی = ۵

۶- (۱) ۱، - (ا + ۲ ب)/(۲ ا + ب) (۲) ۳، ۳، ۱ ۷- پہلی رقم ۱ ؛ فرقِ مشترک ۱/۴

۸- ف^{۲} - ق ؛ - ف (ف^{۲} - ۳ ق) ؛ (ف^{۲} - ق) (ف^{۲} - ۳ ق)

۹- ۱/۲ (ا ب + ا$^{-۱}$ ب$^{-۱}$) ۱۰- ۷/۱۳

۱۳- ا^{۲} منٹ ؛ ب^{۲} منٹ ۱۴- ا^{۲} = ب^{۲} = ج^{۲}

۱۵- $\text{لا}^2 = \text{ما}^2 = \frac{\text{د}}{\text{ا} + \text{ب} + \text{ج}}$ ؛ یا $\frac{\text{لا}}{\text{ج} - \text{ا}} = \frac{\text{ما}}{\text{ا} - \text{ب}} = \text{ک}$

جہاں $\text{ک}^2 (\text{ا}^2 + \text{ب}^2 + \text{ج}^2 - \text{ب ج} - \text{ج ا} - \text{ا ب}) = \text{د}$

۱۶- ایک میل فی گھنٹہ

۱۷- (۱) (ب + ج) (ج + ا) (ا + ب) (۲) $\sqrt{\frac{۵ - ۴\text{لا}}{۲}} + \sqrt{\frac{۲\text{لا} - ۳}{۲}}$

۱۸- $\frac{۳۵}{۹}$ ؛ ۲۲۶۸

۱۹- (۱) $\frac{۲۱ \pm \sqrt{۱۰۵}}{۱۴}$

(۲) لا = ما = $\pm \sqrt{\text{ا ب}}$ ؛ $\frac{\text{لا}}{۲\text{ا} + \text{ب}} = \frac{\text{ما}}{-(۳\text{ا} + ۲\text{ب})} = \pm \sqrt{\frac{\text{ا ب}}{\text{ب}^2 + \text{ا ب} - ۲\text{ا}^2}}$

۲۲- اگ ت ۵ ؛ ۹

۲۳- $\frac{۱}{۲} \{ (۱ + ۲ + ۳ + \dots + \text{ن})^2 - (۱^2 + ۲^2 + ۳^2 + \dots + \text{ن}^2) \}$

۲۴- مزدوری ۵ شلنگ ؛ روٹی ۶ پنس ۲۵- ۶، ۱۰، ۱۴، ۱۸

۲۶- (۱) ا، $\frac{\text{ج} (\text{ا} - \text{ب})}{\text{ا} (\text{ب} - \text{ج})}$ (۲) $\frac{\text{ا ب} (\text{ج} + \text{د}) - \text{ج د} (\text{ا} + \text{ب})}{\text{ا ب} - \text{ج د}}$

۲۸- $۸۸ \frac{۸}{۹}$ میل

۲۹- لا = ۳ک، ما = ۴ک، ی = ۵ک

جہاں $\text{ک}^3 = ۱$، پس ک = ۱، س، یا س^2

۳۰- ۴۸۰ ۳۱- ۳۳ نصف کراؤن، ۱۹ شلنگ، ۸ پنس ؛ یا

۲۷ نصف کراؤن، ۶ شلنگ، ۱۷ پنس

۳۲- ا = ۶، ب = ۷ ۳۳- ۴۰ منٹ

۳۵- $۱ + لا + \frac{۱}{۲} لا^{۲} - \frac{۱}{۲} لا^{۳} - \frac{۱۳}{۸} لا^{۴}$

۳۷- $\frac{-۱ \pm \sqrt{-۳}}{۲}$ ، یا $\frac{۱ \pm \sqrt{۲۱}}{۲}$ [$(لا^{۴} - لا - ۵)(لا^{۲} + لا + ۱) = ۰$]

۳۸- $ا = ۸$ ؛ $\frac{لا - ۴}{لا - ۵}$ ۴۰- پہلی رقم ۴۱- ۱۳، ۹

۴۲- $\frac{۱ + ۴ ب^{۲} ج^{۲} + ۹ ج^{۲} ا^{۲} + ا^{۲} ب^{۲}}{ا^{۲} + ب^{۲} + ج^{۲}}$

۴۳- (۱) ۳، -۲، $\frac{-۱ \pm \sqrt{-۳۹}}{۲}$ [دونوں طرف $لا^{۲} + ۴$ شامل کردو]

(۲) $لا = ۱، -\frac{۱}{۲}، -۱، ۰، ۰$ ؛

$ل = ۱، -\frac{۱}{۲}، ۰، -۱، ۰$ ؛

$ی = ۱، -\frac{۱}{۲}، ۰، ۰، -۱$ ؛

۴۷- ۵۷۸۰

۴۸- ۱۵۰ اشخاص نے اپنی رائے بدل لی ؛ پہلے قلت ۲۵۰ اشخاص کی تھی اور کثرت ۳۵۰ کی۔

۵۰- ۹۳۶ آدمی

۵۱- (۱) ۰، $ا \frac{۲^{۲} - ۱}{۲^{۲} + ۱}$ (۲) $\frac{اد - ب ج}{ا - ب - ج + د}$

[فرض کرو $(ا - ج)(ب - د) = \{(لا - ج) - (لا - ا)\}\{(لا - د) - (لا - ب)\}$ ؛ پھر مربع کرو]

۵۳- ۶، $\frac{۱۶۱}{۳۰}$ ۵۵- $م = \frac{۲ ب \sqrt{ا}}{\sqrt{ا} + \sqrt{ب}}$ ، $ن = \frac{۲ ا \sqrt{ب}}{\sqrt{ا} + \sqrt{ب}}$

۵۸- (۱) ۱، (۲) $\pm ۴\sqrt{۲}$ [اگر $لا^{۲} - \frac{۱۶}{لا^{۲}} = ما^{۲}$ فرض کیا جائے تو ہمیں حاصل ہوتا ہے $ما^{۴} - ۱۶ - ۴ ما (ما^{۲} - ۴) = ۰$]

۶۰- $\frac{(ا - ج) ف}{ب - ج}$ مرد ؛ $\frac{(ب - ا) ف}{ب - ج}$ عورتیں

۶۳- ۰، ا + ب، $\frac{ا^۲ + ب^۲}{ا + ب}$

۶۴- سلسلۂ حسابیہ کا فرق مشترک $\frac{ب - ا}{ن - ۱}$ ہے؛ سلسلۂ حسابیہ کا وہ فرق مشترک جو سلسلۂ موسیقیہ کا مقلوب ہے $\frac{ا - ب}{ا ب (ن - ۱)}$ ہے۔

[ر ویں رقم $\frac{ا (ن - ر) + ب (ر - ۱)}{ن - ۱}$ ہے؛ (ن - ر + ۱) ویں رقم $\frac{ا ب (ن - ۱)}{ا (ن - ر) + ب (ر - ۱)}$]

۶۸- ۱۹ ۶۹- ۸۷ پونڈ

۷۰- ۰، $\frac{۱ \pm \sqrt{-۳}}{۲}$، $\frac{-۱ \pm \sqrt{-۳}}{۲}$

[(ا + ب)^۳ - ا^۳ - ب^۳ = ۳ ا ب (ا + ب)، اور (ا - ب)^۳ - ا^۳ + ب^۳ = -۳ ا ب (ا - ب)]

۷۲- (۱) لا = $\pm \frac{\text{لوک } ۳}{\text{لوک } ۶}$ = $\pm$ ۶۱۴ء

(۲) لا = $\pm \frac{۲ (۱ - ۲ \text{ لوک } ۲)}{۱ - \text{لوک } ۲}$ = $\pm$ ۱ء۱۳۹

۷۳- ۲، ۷ ۷۴- ۸ گھنٹے

۷۹- (۱) $\frac{لا}{ا} = \frac{ما}{ب} = \frac{ی}{ج}$ = ۰، یا $\frac{ا + ب + ج}{ا ب ج}$

(۲) لا = ما = ی = ۱

۸۰- ا = ۳، ب = ۱ ۸۱- [فرض کرو لا - ا = ل اور ما - ب = م]

۸۲- لا = ۳ ۸۴- ۱۲۶

۸۵- اسٹاک میں جمع کردہ رقوم ۷۷۰۰ پونڈ اور ۳۵۰۰ پونڈ تھیں: اور ہر ایک لڑکی کو ۱۴۰۰ پونڈ ملینگے۔

۸۶- ۵۰۳ ساعت کے پیمانہ میں۔ ۹۱- لندن سے ۲۵ میل

۹۵- لا = ۵، ۱، (۱۵ ± ۶√-۱)/۲۹ ؛ ما = ۳، ۳/۵ ، (۲۵ ± ۱۰√-۱)/۲۹

۹۶- √(۵/۳)   ۹۸- ۱/(۲ن)

۱۰۰- تفاعلِ تکوینی (۱ + ۴لا)/(۱ - لا - ۲لا^۲) ہے؛ حاصلِ جمع = ۲(۱ - ۲^ن لا^ن)/(۱ - ۲لا) - (۱ - (-۱)^ن لا^ن)/(۱ + لا) ؛ ن ویں رقم = {۲^ن + (-۱)^ن} لا^(ن-۱)

۱۰۷- ا^۲ + ب - ج^۲ - د   ۱۰۸- ۱۲ آدمی، ۱۴ پونڈ ۱۸ شلنگ

۱۰۹- (۱) لا = ا، ما = ب، ی = ج

(۲) لا = ۳، یا ۱ ؛ ما = ۱، یا ۳

۱۱۱- ۱ + ۱/(۱+) ۱/(۱۲+) ۱/(۱+) ۱/(۱+) ۱/(۱+) ۱/۹ ؛ لا = ۹۴۸، ما = ۳۹۲

۱۱۳- ۱۲ پونڈ ۱۵ شلنگ

۱۱۷- (۱) لا = ا، ما = ب؛ لا = ا، ما = ۲ا ؛ لا = ۲ب، ما = ب

(۲) لا = ۳ یا ۱، ما = ۲، ی = ۱ یا ۳

لا = (-۱ ± √۲۹)/۲ ، ما = -۳؛ ی = (-۱ ∓ √۲۹)/۲

۱۲۰- (۱) ۱ - ۱/(ن + ۱)^۲

(۲) ا(لا^ن - ۱)/(لا - ۱) + ب/(لا - ۱)^۳ {لا^(ن+۲) + لا^(ن+۱) - (ن + ۱)^۲ لا^۲ + (۲ن^۲ + ۲ن - ۱) لا - ن^۲}

۱۲۱- ۱/۳   ۱۲۲- (۱) (-۵ ± √-۱۱)/۶ یا (-۳ ± √۵)/۲

(۲) لا = ۰، ما = ۰، ی = ۰ ؛ لا = ±۲، ما = ±۱، ی = ±۳

۱۲۴- $\frac{۱۳لا - ۲۳}{۳(لا^{۲} - ۳لا - ۱)} - \frac{۱۰لا - ۱}{۳(لا^{۲} + لا + ۱)}$ ؛ $- \frac{ر + ۲}{۲^{ر+۱}}$

۱۲۵- ل = ۱؛ پیمانۂ ربط ۱ - لا - ۲لا^{۲} ہے؛ رقمِ عامہ $\{۲^{ن-۳} + (-۱)^{ن-۱}\} لا^{ن-۱}$ ہے۔

۱۲۶- (۱) لا = -۶، ۲؛ ما = ۹، -۳ (۲) لا = $\frac{۱}{ا}$ ؛ ما = $\frac{۱}{ب}$

۱۲۸- (۱) $\frac{ا^{۲}}{۲}$ (۲) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۹}$ ۱۲۹- ۱۲، ۱۶؛ یا ۴۸، ۴

۱۳۰- (۱) لا = ± ۷،

(۲) $\frac{لا}{ا} = \frac{ما}{ب} = \frac{ی}{ج} = \pm \frac{ک}{۲ا ب ج}$، جہاں ک^{۲} = ۲ب^{۲}ج^{۲} + ۲ج^{۲}ا^{۲} + ۲ا^{۲}ب^{۲} - ا^{۴} - ب^{۴} - ج^{۴}

۱۳۳- ۱۱، ر - ۱ ۱۳۴- ۳۸۴ مربع گز

۱۳۶- ا = ± ۲، ب = ۳، ج = ± ۲

۱۳۷- (۱) لا = $\pm \frac{۷}{\sqrt{۲}}$، ما = $\pm \frac{۹}{\sqrt{۲}}$ (۲) $\pm \frac{۱}{\sqrt{۲}}$ ؛ $\pm \sqrt{\frac{۱۳}{۱۰}}$

۱۳۸- ۳ پونڈ ۲ شلنگ پہلی فروخت پر اور ۲ پونڈ ۱۲ شلنگ دوسری فروخت پر۔

۱۳۹- (۱) $\frac{۱}{۶}$ ن(ن + ۱)(۲ن + ۱)

(۲) $\frac{۱}{۳۰}$ ن(ن + ۱)(ن + ۲)(۳ن^{۲} + ۶ن + ۱)

(۳) $\frac{۱}{۶}$ ن(ن + ۱)(۴ن - ۱)

۱۴۱- (۱) لا = ۱ یا $\frac{۱۴}{۵}$ ؛ ما = ۳ یا $\frac{۱۵}{۷}$

(۲) لا، ما، ی ۳، ۵، ۷ کی قیمتوں کی ترتیب رکھ سکتے ہیں۔

۱۴۲- ما^{۳} + ق ما^{۲} - ق^{۲} ما - ق^{۳} - ۸ر = ۰

۱۴۳- (۱) $\frac{لا(لا^{ن}-۱)}{(لا-۱)^{۲}} - \frac{ن}{لا-۱}$ (۲) $\frac{۳+۱۴لا-۱۵۷لا^{۲}}{۱+۵لا-۵۰لا^{۲}-۱۸لا^{۳}}$

(۳) $۲^{ن+۱} + \frac{۱}{۲}ن(ن+۷)-۲$

۱۴۴- $۲(ب^{۳}-د^{۳}) = ۳(ب^{۲}-ج^{۲})(ب-ا)$

۱۴۵- -۲، -۲، -۲، $\frac{۲}{۳}$

۱۴۶- ا چلتا ہے متواتر دنوں میں ۱، ۳، ۵، ۷، ۹	۱۱، ۱۳، ۱۵، ۱۷، ۱۹، ۲۱، ۲۳	میل
ب " " " ۱۲، ۱۳	۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰	

اِس طرح ب، ا کو ۲ دن میں پکڑ لیتا ہے اور تیسرے دن اُس سے آگے گذر جاتا ہے؛ لیکن انجام کار ا، ب پر سبقت لے جاتا ہے اور ب کے نویں دن اُس کو پکڑ لیتا ہے۔

۱۴۷- $\frac{\sqrt{۳۷}-۴}{۷}$

۱۴۸- $-(ا+ب+ج)$، $-(ا+سب+س^{۲}ج)$، $-(ا+س^{۲}ب+سج)$

۱۵۰- ن ویں رقم $\frac{ن(ا^{ن}-ب^{ن})}{ا-ب}لا^{ن-۱}$؛ حاصل جمع $= ا - ب$

جہاں $ا = \frac{ا(۱-ن ا^{ن} لا^{ن})}{۱-ا لا} + \frac{ا^{۲}لا(۱-ا^{ن-۱}لا^{ن-۱})}{(۱-ا لا)^{۲}}$،

اور ب سے ب کا تفاعلِ مطابق ظاہر ہوتا ہے۔

۱۵۱- $ق ما^{۳} - ۲ف^{۲}ما^{۲} - ۵ف ق ما - ۲ف^{۳} - ق^{۲} = ۰$

۱۵۳- (۱) -۷، $\frac{۷ \pm ۳\sqrt{-۳}}{۲}$ (۲) ± ۱، ۳، ۴ ۱۵۴- ۳ دن

۱۵۶-(۱) ½، ۱/۱۲، (۵ ± √۳۹)/۲۴ [(۱۲لا-۱)(۱۲لا-۲)(۱۲لا-۳)(۱۲لا-۳) = ۱۲۰]

(۲) ۱ ± √۱۹ [۹۲/۵۸۵ = ۱/۵ + ۱/۹ - ۲/۱۳]

۱۵۷- تقریباً ۲۲ سال　　۱۶۱- ۴۴ گھنٹے

۱۶۳-(۱) لا² - ما² = (-۷ ± √۲۱۷)/۴ ؛ لا = ±۱، ±۲ ؛
ما = ∓۲، ∓۱ ؛ لا - ما = ± √۳

(۲) لا = ک (ب² + ج² - اِ² ب² - اِ² ج²)، وغیرہ
جہاں ک² (اِ³ + ب³ + ج³ - ۳ اِ² ب² ج²) = ۱

[یہ ثابت کرنا آسان ہے کہ اِ² لا + ب² ما + ج² ی = ۰ اور
اِ² ما + ب² ی + ج² لا = لا³ + ما³ + ی³ - ۳ لا ما ی = اِ² ی
+ ب² لا + ج² ما]

۱۶۳-۲ (اِ + ب + ج) لا = (ب ج + ج اِ + اِ ب) ±
√((ب ج + ج اِ + اِ ب)² - ۴ اِ ب ج (اِ + ب + ج))

[مساوات (اِ + ب + ج) لا² - (ب ج + ج اِ + اِ ب) لا
+ اِ ب ج = ۰ میں تحویل ہو جاتی ہے]

۱۶۴-(۱) ۱/۱۲ ن (ن + ۱) (ن + ۲) (۳ ن + ۱۳)

(۲) ۳ و ۵

۱۶۶-(۱) لا = (۵۱ + ۳۰ √۲)/۸ ، ما = ع/۸ [لا کو ساقط کرو]

(۲) لا، ما، ی مقادیر ۲، (۱ + √۳)/۲ ، (۱ - √۳)/۲ کی ترتیبیں ہیں۔

۱۶۷- $($لا $+$ ما $+$ ی$)^{۲} = ۳$ک^{۲} ۱۶۸- ۲

۱۶۹- لا^{۳} + ما^{۳} + ی^{۳} - ۳لاما ی

۱۷۰- وہ $\frac{۳}{۴}$ میل پیدل چلتا ہے، $۷\frac{۱}{۲}$ میل گاڑی میں جاتا ہے، ۱۰ میل فی گھنٹہ کے حساب سے گھوڑے پر جاتا ہے۔

اب = $۳۷\frac{۱}{۲}$، بج = ۳۰، جا = ۱۵ میل

۱۷۲- (۱) لا = ۱۳ یا ۱۰، ما = ۱۰ یا ۱۳

(۲) لا = $\frac{د\,(ا - ب)}{د - ج}$؛ ما = $\frac{ج\,(ا - ب)}{د - ج}$؛

ی = $\frac{ب\,(د - ج)}{ا - ب}$؛ ع = $\frac{ا\,(د - ج)}{ا - ب}$

۱۷۴- ۳۲۰۰ پونڈ ۱۷۶- رما^{۳} + ۳رما^{۲} + (۳ر - ف^{۳})ما + ر^{۳} = ۰

۱۷۷- ل = (اج ± بد) (عگ ± فھ) (بج ∓ اد) (فگ ∓ عھ)

م = (بج ∓ اد) (عگ ± فھ) - (اج ± بد) (فگ ∓ عھ)

۱۷۸- لا = ۶، -۵؛ $\frac{۱۳ \pm \sqrt{-۴۷}}{۲}$؛ $\frac{-۱۴ \pm \sqrt{-۷۴}}{۲}$

ما = ۵، -۶؛ $\frac{-۱۳ \pm \sqrt{-۴۷}}{۲}$؛ $\frac{۱۴ \pm \sqrt{-۷۴}}{۲}$

[فرض کرو لا - ما = ع اور لاما = و تب ع^{۲} + ۲و = ۶۱، ع(۱۱ + و) = ۹۱]

۱۸۲- ۸۹۸۷

۱۸۳۔ $ما^3 - ب\,ما^2 - اج\,ما - ج^2 = ۰$ ، -۱ ، -۲ ، $-\frac{۱}{۲}$ ، $\frac{۳ \pm \sqrt{۵}}{۲}$

۱۸۶۔ (۱) لا، ما کی مقادیر ۱، $\frac{۱ + \sqrt{-۳}}{۲}$ ، $\frac{۱ - \sqrt{-۳}}{۲}$ کی ترتیبیں ہیں۔

(۲) $لا = \pm \left(\frac{ا(ب^2 + ج^2)}{۲ب\,ج} \right)$ ، وغیرہ

۱۸۷۔ قدامت پسند — انگریز ۲۸۶، سکاچ ۱۹، آئرش ۳۵، ویلش ۱۱

جدّت پسند — انگریز ۱۷۳، سکاچ ۴۱، آئرش ۶۸، ویلش ۱۹

۱۹۱۔ (۱) ۷، ۹، -۳ (۲) $۲ \pm \sqrt{-۳}$ ، $-۲ \pm \sqrt{-۱}$

۱۹۲۔ $۲ا_ن = ا + ب + \frac{ا - ب}{۳^ن}$ ؛ $۲ب_ن = ا + ب - \frac{ا - ب}{۳^ن}$

۲۰۱۔ $\frac{\lfloor م + ن - ۲}{\lfloor م - ۱ \ \lfloor ن - ۱}$ ۲۰۲۔ ۵۴، -۲۶، $۱۴ \pm ۸۴۰\sqrt{-۱}$

۲۰۴۔ $\frac{ن}{ن + ۱}$ ، $\frac{۴^{ن+۱} + ۳(-۱)^{ن+۱}}{۴^{ن+۱} - (-۱)^{ن+۱}}$

۲۰۶۔ $\frac{۳ر\,م^3 + ن\,م^2 ق - ۳ن^3}{ر\,م^3 + ن\,م^2 ق + ن^3}$ ۲۰۷۔ تقریباً ۱۸ سال

۲۰۹۔ ۷ پول، ۱۴ ترک، ۱۵ یونانی، ۲۴ جرمن، ۲۰ اٹلی والے

۲۱۰۔ $\frac{۱}{۲} - \frac{لا}{۴} - \frac{۱ + لا^2}{۲لا}$ لوک (۱ + لا)

۲۱۲۔ (۱) $\frac{۱}{۴}$ ن (ن + ۱) (ن + ۲) (ن + ۳)؛

(۲) $\frac{۴ + ۳لا + لا^2}{(۱ + لا)^3}$ (۳) ۲۳

۲۱۳۔ $-\frac{۱۱}{۹۷}$ ۲۱۵۔ $لا = ا \pm \sqrt{\frac{(ا^2 + ب\,ہ)(ا^2 + ج\,ہ)}{ا^2 + ع\,ہ}}$ ، وغیرہ ۲۱۷۔ ۴۲۰

۲۲۳- (۱) لا = ما = ۱/۲ (± ۵ ± √۱۳-۳) ، ی = ۱/۳ (± ۱۵ ∓ ۲√۱۳-۳)

یا لا = ۴، ۶، -۴، -۶

ما = ۶، ۴، -۶، -۴

ی = ۵، ۵، -۵، -۵

(۲) (لا - ا)/(ا (ب - ج)) = (ما - ب)/(ب (ج - ا)) = (ی - ج)/(ج (ا - ب)) = ل

جہاں (ب - ج) (ج - ا) (ا - ب) ل = ا^۲ + ب^۲ + ج^۲ - ب ج - ج ا - ا ب

۲۲۶ -- ۱۲ گھوڑے ، ۱۵ گائے ، ۲۰ بکری

۲۲۹- نہا {ن (ن/(ن+۱) - ۱)} = ۳/۲ ؛ مستدق

۲۳۰- سلسلہ کا پیمانہ ۱ - ۱۲ لا + ۳۲ لا^۲ ؛ ن ویں رقم = ۱/۲ {۴^(ن-۱) + ۸^(ن+۱)} ؛

س ن = ۲^(۳ن-۱)/۳ + ۲^(۳ن-۱)/۷ - ۵/۲۱

۲۳۱- ۱۱/۲۴۳ ۲۳۲- ۲لا = ± √(ا^۲ - ب^۲ + ج^۲) ± √(ا^۲ + ب^۲ - ج^۲) ، وغیرہ

۲۳۴- ا^۳ + ب^۳ + ج^۳ = ا^۲ (ب + ج) + ب^۲ (ج + ا) + ج^۲ (ا + ب)

۲۳۵- (۱) (۱ - لا)^۲ س = ۱ + ۴ لا + لا^۲ - (ن + ۱)^۲ لا^ن + (۳ن^۲ + ۶ن - ۴) لا^(ن+۱)

-(۳ن^۲ + ۳ن^۲ = ۳ن + ۱) لا^(ن+۲) + ن^۳ لا^(ن+۳)

(۲) ۱/۸ - ۱/((ن + ۱)^۲ (ن + ۲)^۲)

۲۳۶- ۱ + ق^{3}لا^{4} + ق^{5}لا^{8} + ق^{7}لا^{12} + ق^{9}لا^{16} + ق^{11}لا^{20} + ق^{13}لا^{24} + ق^{15}لا^{28} + ق^{17}لا^{32}
+ ق^{2}لا^{36}-

۲۳۷- ۳ گھنٹے ۱۵ منٹ　　۲۴۰- ۲ یا - $\frac{1}{2}$　　۲۴۲- ۱۴۰-

۲۴۴- ۳، ۴، ۵، ۶　　۲۴۶- ق^{3}(ج^{2} - ۳ د^{2})^{2} = (ا ب^{2} + ۲ د^{3}) (ا ب^{2} - د^{3})^{2}

۲۴۷- ۲، ۶، ۱، ۳　　۲۴۸- $\frac{6}{13}$

۲۴۹- (۱) ۲$^{ن+1}$ - ۲ - $\frac{1}{6}$ ن (ن+۱)(۲ن + ۱)

(۲) $\frac{2^{ن+1}}{(ن+1)(ن+3)}$ - $\frac{2}{3}$

(۳) $\frac{1 - لا^{ن+1}}{1 - لا}$ + $\frac{2(1 - 2^{ن} لا^{ن})}{1 - 4لا^{2}}$ جہاں ن جفت ہے؛

$\frac{1 - لا^{ن+1}}{1 - لا}$ + $\frac{2(1 - 2^{ن+1} لا^{ن+1})}{1 - 4لا^{2}}$ جہاں ن طاق ہے۔

۲۵۰- (۱) لا = ما = ی = ۰ یا $\frac{ا}{3}$ اگر لا^{2} + ما^{2} + ی^{2} + مای + ی لا
+ لاما = ۰ ہو تو لا + ما + ی = - ا اور حل غیر معین ہے۔

(۲) $\frac{لا}{ا(-ا + ب + ج)}$ = $\frac{ما}{ب(ا - ب + ج)}$ = $\frac{ی}{ج(ا + ب - ج)}$
= $\frac{1}{\pm\sqrt{(-ا + ب + ج)(ا - ب + ج)(ا + ب - ج)}}$

۲۵۳- - (ا$_{1}$لا + ب$_{1}$ما + ج$_{1}$ی)(ا$_{1}$لا + ب$_{1}$ما + ج$_{1}$ی)(ا$_{1}$لا - ب$_{1}$ما + ج$_{1}$ی)
× (ا$_{1}$لا + ب$_{1}$ما - ج$_{1}$ی) جہاں ا$_{1}$ = $\sqrt{ا(ب-ج)}$ وغیرہ

۲۵۶- (۱) لا = ۱، سر، سر^{2}
ما = ۱، سر^{2}، سر

ی = - (ا + ب)، - (ا س۱ + ب س۱۲)، - (ا س۲۱ + ب س۲)

(۲) لا = ۳، یا ۷، ی = ۶، یا -۴
ما = ۷، یا ۳، ۶ = ۴، یا -۶

۲۵۷- کم از کم ۳ ر - ۲ مقام تک

۲۵۸- چائے ۲ شلنگ ۶ پنس؛ کافی ۱ شلنگ ۸ پنس

۲۶۲- ۲ ق۲ - ۶ ف ر + ۲۴ س

۲۶۳- ۱۱ فیل مرغ، ۹ راج ہنس، ۳ بطخیں

۲۶۶- (۱) لا، ما، ی کی ترتیبیں حسب ذیل قیمتوں کی ہیں:-

ا، ½ ا (ب-۱ + √(ب۲ - ۲ب - ۳))، ½ ا (ب - ۱ - √(ب۲ - ۲ب - ۳))

(۲) لا = ما = ی = ۱؛ لا = (ا + ب + ج)/(ا - ب - ج)؛ وغیرہ ۲۶۷- صفر

۲۶۸- ۱۶ پادری جن کی اوسط عمر ۴۵ سال
۲۴ ڈاکٹر جن کی اوسط عمر ۳۵ سال
۲۰ وکیل جن کی اوسط عمر ۳۰ سال

۲۶۹- (ا۱ ا۲ - ا۲) (ا۱ ا۲ - ا۱۲) = (ا۱ ا۲ - ا۲)۲

یا ا ا۱ ا۲ + ۲ ا۱ ا۲ ا۱۲ - ا ا۲۲ - ا۱۲ ا۲ - ا۳ = ۰

۲۷۰- لا = ± ا۲/√(ا۲ + ب۲ + ج۲)، وغیرہ؛ ی = ± ب ج/√(ا۲ + ب۲ + ج۲)، وغیرہ ۲۷۳- ۰ و ½

۲۷۴- (۱) (۱ - ۲/لا) لوک (۱ - لا) - ۲ (۲) ۱/(۱-ی) {۱ - ن! /((ا + ۱)(ا + ۲)...(ا + ن))}

۲۷۵- (۱) لا = $\frac{۳}{۲}$، $\frac{۳}{۲}$، ۲ ؛

ما = -۱، -$\frac{۴}{۳}$، -۱ ؛

ی = ۱، $\frac{۳}{۴}$، $\frac{۳}{۴}$ ؛

(۲) لا = ±۴، ما = ±۵، ۶ ±۲، و ±۱

لا = ± $\frac{۵}{۳}\sqrt{\frac{۲}{۳}}$، ما = ∓ ۲$\sqrt{\frac{۲}{۳}}$، ی = ∓ $\frac{۱}{۳}\sqrt{\frac{۲}{۳}}$،

و = ± $\sqrt{\frac{۲}{۳}}$

۲۷۶- $ا^{۲}$ + $ب^{۲}$ + $ج^{۲}$ + $د^{۲}$ + ہ

۲۷۷- - $ف_{۱}^{۳}$ + ۳ $ف_{۱}ف_{۲}$ - ۳ $ف_{۳}$

۲۷۹- ا، چھ پرندے ؛ ب، ۴ پرندے

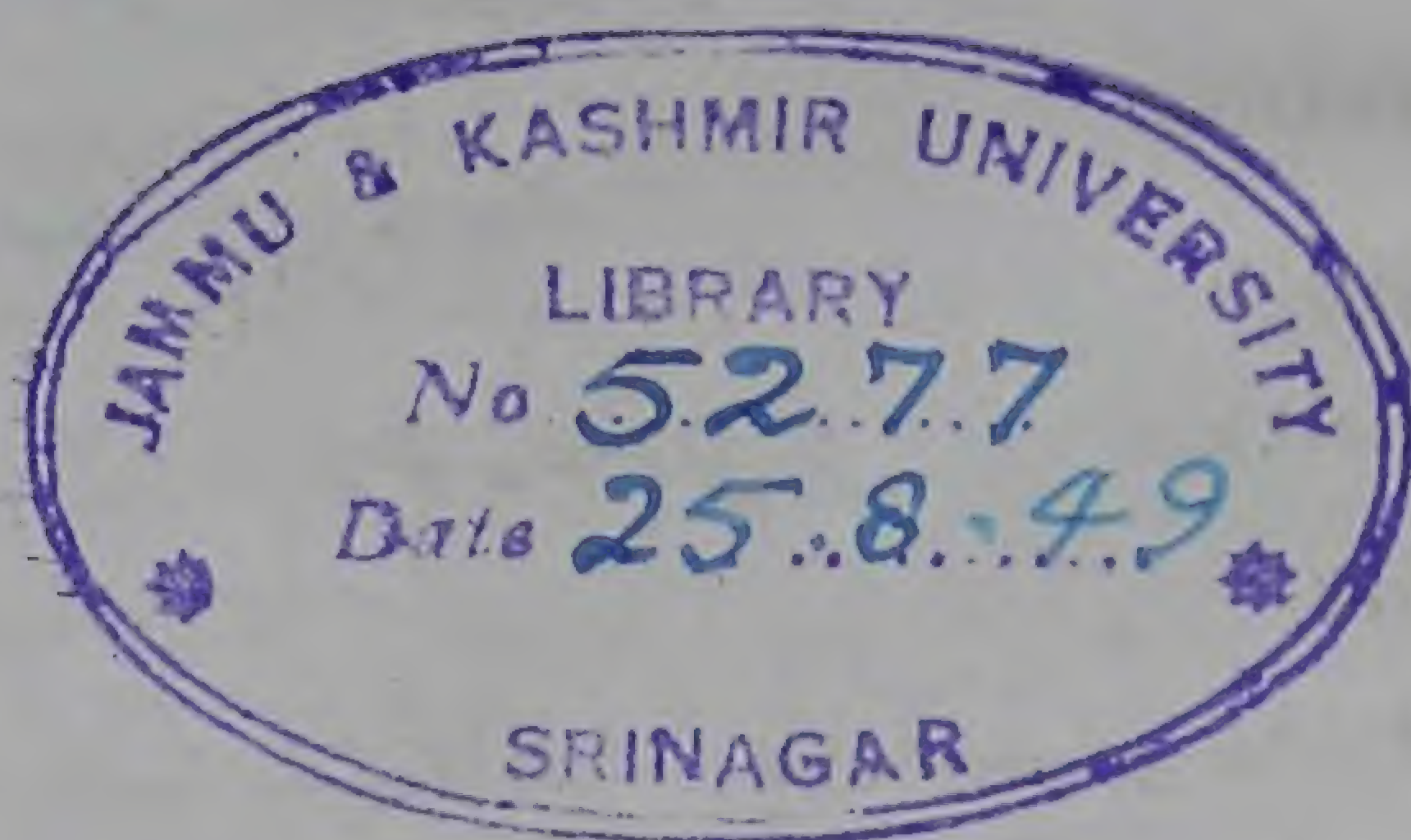
۲۸۱- ۲　　۲۸۷- ا، -۵ا، -۵ا

۲۸۹- $لا_{۱}$ = - $\frac{(ب_{۰} - ا_{۱})(ب_{۱} - ا_{۲})\ldots(ب_{۱} - ا_{ن})}{(ب_{۱} - ب_{۲})(ب_{۱} - ب_{۳})\ldots(ب_{۱} - ب_{ن})}$، وغیرہ-

۲۹۱- ا نے ۵۴ دن کام کیا؛ ب نے ۴۲ دن؛ ج نے ۱ دن

۲۹۴- ($ب^{۲}$ + $ج^{۲}$ - $ا^{۲}$) ($ا^{۲}$ - $ب^{۲}$ + $ج^{۲}$) ($ا^{۲}$ + $ب^{۲}$ - $ج^{۲}$)

۳۰۰- ۳ میل سیر کی، روزانہ ۴ گھنٹے کام کیا؛

یا ۴ میل سیر کی، روزانہ ۳ گھنٹے کام کیا؛

فہرستِ اصطلاحات

جبر و مقابلہ حصّۂ دوم

انگریزی	اُردو
A	
Advisible solutions	قابلِ قبول حل
Algebraical equivalent	جبریہ مُعادل
Algebraical form	صورتِ جبریہ
Alternating	متبادل
Ambiguity	اشتباہ
Ambiguities	مشتبہ علامتیں
Amount	شرح
Analytical geometry	ہندسۂ تحلیلی
Annuity	سالیانہ
A posteriori probability	احتمالِ موخر
A priori probability	احتمالِ مقدم
Arbitrary number	اختیاری اعداد
Arithmetical order	ترتیبِ حسابی
Arithmetical progression	حسابی سلسلہ
Auxiliary series	معاون سلسلہ

انگریزی	اُردو
Axes	محاور
Axioms	علومِ متعارفہ
B	
Banken's discount	ساہوکاری منہا
Biquadratie equations	مساواتِ درجۂ چہارم
C	
Certainty	یقینی
Chance	اتفاق
Combination	اجتماع
Commensurable root	متوافق اصل
Common ratio	مشترک نسبت
Compact form	منضبط شکل
Complete quotient	مکمل خارج قسمت
Complex numbers	ملتف اعداد
Components	اجزائے ترکیبی
Composite number	مرکب عدد
Concurrent testimony	ہم عصر شہادت

انگریزی	اُردو
Congruence	استطابق
Congruent	مستطابق
Consecutive co-efficient	متصل سر
Consecutive terms	مسلسل رقوم
Conservative	قدامت پسند
Consonants	حروفِ صحیح
Constituents (of a determinant)	افرادی جزو
Continuations	تسلسل
Continued fraction	کسورِ مسلسل
Convergence	استدقاق
Convergent	مستدق
Cycle	دَور
D	
Deffered annuity	ملتوی سالیانہ
Deffered perpetuity	ملتوی دوامی
Denary	عشری
Denary scale	عشری پیمانہ
Dependant	تابع
Derivative	مستخرجہ
Derived function	تفاعل مستخرجہ
Descending powers	نزولی قوتیں
Detached co-efficient	منفردہ سر

انگریزی	اُردو
Determinant	مقطوعہ (واحد) مقطوعات (جمع)
Dice	مُہرہ
Discount	ہنتی
Discriminating cubic	ممیزِ کعبی
Divergence	اتّساع
Divergent	متّسع
E	
Elementary algebra	ابتدائی جبر و مقابلہ
Elements of a determinant	مقطوعہ کے ترکیبی جزو
Elimination	اسقاط
Eliminant	مسقط
Equivalent function	تفاعل مُعلول
Expansion	تفصیل
Expression	جمُلہ
F	
Figurate numbers	اعدادِ مشکّل ۔ اشکالی اعداد
Fundamental	مسلمہ اور اساسی
G	
General term	عمومی رقم
Generating function	تفاعل تکوینی
Geometrical methods	ہندسی طریقے
H	
Harmonic mean	اوسطِ موسیقی (واحد) اوساطِ موسیقی (جمع)

انگریزی	اُردو
Harmonic progression	سلسلۂ موسیقیہ
Homogeneous equations	مساواتِ متجانس
Homogeneous linear	متجانس خطّی
Homogeneous products	متجانس حاصلِ ضرب
Hydropathic establishment	آبی شفاخانہ

I

انگریزی	اُردو
Incommensurable	متباین
Inconsistent	غیر مطابق
Indeterminate (equations)	غیر معین (مساواتیں)
Inequalities	لاتساویات (جمع) لاتساوی (واحد)
Infinite	لاانتہا
Infinite series	لامتناہی سلسلہ
Infinity	لامتناہی
Insertion	اِدخال
Instalment	قسط
Integral calculus	احصائے تکملات
Integral function	صحیح تفاعل
Integral values	صحیح قیمتیں
Integers	صحیح اعداد
Inverse probability	مقلوب احتمال
Irrational parts	غیر ناطق حصّے
Irreducible	ناقابلِ تحویل

L

انگریزی	اُردو
Large integers	بڑے صحیح عدد
Law of commutation	قانونِ مبادلہ
Law of distribution	کلیۂ تقسیم
Laws of indices	کلّیاتِ قوت نما
Leading element	جزوِ رئیس
Lease	اِجارہ
Liberals	حُریت پسند
Life annuity	حیاتی سالیانہ
Lim	نہا
Limiting values	انتہائی قیمتیں
Limits	حدود۔ انتہائیں
Linear equations	خطّی مساواتیں
Logarithmic series	لوگارثمی سلسلے
Lottery	قرعہ

M

انگریزی	اُردو
Mean root	وسطی اصل
Minors (of a determinant)	صغائر
Modulus	مقیاس

N

انگریزی	اُردو
Natural numbers	طبعی اعداد
Nominal annual rate	ظاہری سالانہ شرح
Nonary	تسعی
Nonary scale	تسعی پیمانہ

انگریزی	اُردو
Notation	ترقیم
Numerator	شمار کنندہ
O	
Observation	مشاہدہ
Occurrences	واقعات
Octahedral die	ہشت سطحی مہرہ
Operations	اعمال
Oscillating series	اہتزازی سلسلے
P	
Partial fractions	کسورِ جزوی
Pentagonal	مخمس
Penultimate	ماقبل الآخر
Perfect square	مربع کامل
Periodic continued fractions	دوری کسورِ مسلسل
Polygonal numbers	کثیر ضلعی اعداد
Polynomial	کثیر الارقام
Positive integers	مثبت صحیح عدد
Positive root	مثبت اصل
Present value	قیمتِ حاضرہ
Prime	مفرد
Probability	احتمال
R	
Radix	اصل

انگریزی	اُردو
Rational integral function	منطق صحیح تفاعل
Real quantity	حقیقی مقدار
Reciprocal	متکافی مقلوب
Recurring series	سلسلہ متوالی
Resulting equation	مساواتِ محصلہ
Reversion of series	سلسلوں کی تقلیب
S	
Scale of relation	پیمانۂ ربط
Second term	دوسری رقم
Septenary scale	پیمانۂ سبعی
Series	سلاسل، سلسلہ
Spades	حکم
Suffixes	لاحقے
Synthetic division	ترکیبی تقسیم
T	
Target	چاند ماری کا چاند
Tenant	پٹہ دار
Terminating	مختتم
U	
Undetermined co-efficients	نامعلوم سہم
V	
Vanishing fractions	کسورِ منعدم

غلط نامہ

جبر و مقابلہ

حصۂ دوم

صفحہ	سطر	غلط	صحیح	صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۱۰	۲	حملہ	جملہ	۴۳	۲	اب	ا
۱۸	۱۲	-۱۴۶	۲۴۶	″	۹	=۰	=
۱۹	۱۱	ا-(-ب)	-ا-(-ب)	۴۴	۶	ما	ما
۳۵	۱۰	(لا ق)	(لو-ق)	۴۵	۱۷	اصل رہ	اصل یعنی- ج/ب
۳۷	۳	و ۰ ہ	۰	۵۴	۱۹	ن ئے	ن کے
″	۶	ہ ۵	۰	″	۲۰	یہ ایک	یہ ایک
۳۸	۱۳	ر	لا	۶۲	۱۲	ما / ثوما	ما / ثوما
″	۲۰و۲۱	مذکورہ	مذکورہ	۶۳	۲	۱/ی لوک ی / لوک ما	۱/ی × لوک ی / لوک ما
۳۹	۱۳	ن-۲	ن - ۲	۶۴	۱۳	لوک ع ن	+ لوک ع ن
۴۰	۲	ا	اب	۶۵	۱۱	۱ / (۱-لا)۲	۱ / (۱-لا)۲
۴۱	۱۵	صفر / صفر	صفر / صفر				

صفحہ	سطر	غلط	صحیح	صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۷۰	۶	د۲	و۲	۱۲۹	۱۲	ق ن / ل ن − ق ن − / ل ن−۱	ق ن / ل ن − ق ن−۱ / ل ن−۱
〃	۱۱	ر	و	〃	۱۷	۱ / +۲ +	۱ / +۲
۷۱	۶	ر	و	۱۳۰	۱۰	دنوں	دنوں
۷۲	۱۳	(۲ ن ۔ ۱)	(۲ن − ۱)	۱۳۴	۶	۱ / ل۲	۱ / ل۲ن
۷۳	۲	۱ / ن ق	۱ / ن ق	۱۳۷	۵	>ل	>ل ن
۷۷	۱۳	≡	=	۱۳۸	۹	+.....	.....
۷۹	۱	ستدلال	استدلال	۱۳۹	۶	ق −۲	ق ن−۲
۸۱	۱۵	لازماً	لازماً	۱۴۷	۱۰	تت	تب
۸۳	۹	(جہ +۱	(جہ + ۱)	۱۴۸	۱۴	+ دج / اب	ج / اب
〃	۱۲	عن / عن + ۱	عن / عن + ۱	۱۵۰	۱۴	ج	اج
۸۷	۴	قلہ۲	ق۲	〃	۱۸	ب،	ب۱
۹۴	۱۱	ا +	۱ +	۱۵۱	۱۳	ا	ا۲
۱۰۰	۱۲	رقم	رقم	〃	۱۴	منالسب	مناسب
۱۰۸	۷	لا۲...۱	لا۲.....	۱۵۲	۲	ب	بَ
۱۱۳	۱۳	بنائے	بنانے	〃	۳	ج ب ا	ج بَ
〃	۱۴	لہ	کہ	۱۵۴	۴	بچتے	بجتے
۱۱۴	۷	ہمہ	ہم	۱۵۶	۱۳	۴	۳
〃	۱۵	ق ا لا	ق ا۲ لا	۱۵۸	۵	≑	=
۱۲۰	۱۴	ا	ا	۱۶۰	۱۵	+ا / ۲	+ ا / ۲
۱۲۳	۱۵	نکالنے	نکالنے	۱۶۷	۱	ا ن−	ا ن−۲
۱۲۴	۵	۸۰۳	۸۰۲	〃	۱۴	+.....	.....
۱۲۶	۱۰	دان	وال	〃	۱۹	ق ن / ل ن =	ق ن / ل ن ٫

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۱۶۹	۱	....(۲)	....(۱)
۱۷۱	۲	$\frac{۱}{ا+}$ +	$\frac{۱}{ا+}$
۱۷۴	۱۶	جوق $ا^{۲}$	جو $ق^{۲}ا^{۲}$
۱۷۸	۱۲	= ۱	= - ۱
۱۷۹	۱۹	ث	$ث_{۱}$
۱۸۰	۱۷	$\frac{ق}{ل}$	$\frac{قَ}{لَ}$
۱۸۲	۲۰	فورا	فوراً
۱۸۶	۶	$\frac{ر}{م^{۲}+۲ن-ن^{۲}}$	$\frac{ر}{م^{۲}+۲م ن-ن^{۲}}$
//	۸	ق -	ق =
۱۹۱	۵	شال	-۳۸۲
//	۸	-	+
//	۳	اور ا + $ر^{ن-۱}$ لا	اور ا + $ر^{ن}$ لا
۱۹۳	۱۰	قسمت	قیمت
۱۹۴	۱۷	(۱۷۰)	(۷۰)
۲۰۲	۲۰	$\underline{ل۴}$	$\underline{ل۴}$
۲۰۳	۹	ارٹھیمٹک	ارتھمیٹک
۲۰۵	۱۲	......ء	......
۲۰۹	۱	$△_{۲}$ ع۳	$△_{۳}$ ع۳
۲۱۰	۳	$△_{۲}$ ا	$△_{۲}$ اٴ
//	۱۷	......	...... +
۲۱۲	۱۴	$\underline{ل۲}$	$\underline{ل۳}$
۲۱۵	۲۲	(۱-لا)	(۱-لا)
۲۱۶	۸	$لا^{ن}$ + ا	$لا^{ن}$ + ۱
۲۱۸	۱۶	جروی	جُزوی

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۲۲۵	۷	-۶۴ +	-۶۴
۲۲۶	۱۴	۲۵،	۵۰،
۲۳۶	۱۳	$\overline{۳\|}$	$\boxed{۳}$
//	۱۷	+ ۳	+ $۲^{۲}$
۲۳۷	۱۱	$\frac{۷}{۳×۳×۱}$	$\frac{۷}{۳×۲×۱}$ -
۲۳۸	۵	....	.... -
۲۵۲	۱۵	لا - $ما^{ف}$	$لا^{ف}$ - $ما^{ف}$
۲۵۷	۶	(ق - قَ ب	(ق - قَ) ب
۲۵۸	۱۰	ورما	فرما
۲۵۹	۷	(۲) = ۱	(۲) = ۱َ
۲۶۱	۱۲	جَ	جُ
//	۱۶	ہے	سے
۲۶۲	۱۲	÷	+
//	۱۶	جن	جس
۲۶۶	۷	استقراء	استقرائے
۲۶۹	۲۲	غ $\frac{ع}{۲}$ (۱ - $\frac{۱}{ا}$)(۱ $\frac{۱}{ب}$)(۱ - $\frac{۱}{ج}$)	ص $\frac{ع}{۲}$ (۱-ا)(۱-ب)(۱-ج)....
۲۷۰	۲	غ $\frac{ع^{۲}}{۴}$ (۱ - $\frac{۱}{ا}$)(- $\frac{۱}{ب}$)(۱ $\frac{۱}{ج}$)	ص $\frac{ع^{۲}}{۴}$ (۱-ا)(۱-ب)(۱-ج)....
۲۷۱	۳	$\frac{لا^{۵}}{۱+لا^{۲}}$	$\frac{لا^{۵}}{۱+لا^{۱۰}}$
۲۷۷	۳	انتہالوں	انتہاؤں
//	۴	$\frac{ق^{ن-۱}}{ل^{ن-۱}}$	$\frac{ق^{ن-۱}}{ل^{ن-۱}}$ -

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۲۷۷	۸	$ل_{ن+۲}$	$ل_{ن-۱}$
۲۷۹	۱	$\frac{ب_۱}{ا_۱}$، $\frac{ب_۲}{ا_۲}$، $\frac{ب_۳}{ا_۳}$...	$\frac{ب_۱}{-ا_۱}$، $\frac{ب_۲}{-ا_۲}$، $\frac{ب_۳}{-ا_۳}$...
〃	۱۰	$\frac{ب_۲}{ا_۲}$ $\frac{ب_۳}{-ا_۲}$ $\frac{ب_۴}{-ا_۴}$	$\frac{ب_۲}{-ا_۲}$ $\frac{ب_۳}{-ا_۲}$ $\frac{ب_۴}{-ا_۲}$ $\frac{ب_۴}{ا_۴}$
۲۸۰	۳	ل	$ل_۱$
۲۸۲	۱۳	≡	=
۲۸۴	۷	$ک_۲$	$ک_۲$
۲۸۸	۳	$۲۱۶ (۲ و^۳ + ۱)$	$۶ (۲ و^۳ + ۱)$
〃	۴	$ع_۴$ -	$ع_۴$ =
〃	۱۲	$-\frac{ا^۳}{ا_۲ + ۱-}$	$\frac{ا^۳}{ا_۲ + ۱-}$
۲۹۰	۶	$\frac{ع^۲}{ع_۱ - ع_۲}$	$\frac{ع^۲}{ع_۱ + -ع_۲}$
۲۹۲	۱۰	کسیر	کسر
۲۹۳	۱۳	$\frac{۱}{-و}$	$-\frac{۱}{و}$
۲۹۴	۶	$\frac{۱}{ل_۱}$	$-\frac{۱}{ل_۱}$
۲۹۵	۵	کرنے	کرتے
۲۹۶	۳	صرور	ضرور
〃	۱۴	احتمال	۴۵۲- احتمال
۳۰۰	۷	گپند	گیند
〃	۲۴	۳۰	۳

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۳۰۱	۲۳	کراؤں	کراؤن
〃	۲۴	مروں	سروں
〃	〃	سکون	سکوں
۳۰۲	۱۰	ہوکی	ہوگی
۳۰۳	۱۹	$\frac{اَب}{(اَ + ب)}$	$\frac{اَب}{(ا + ب)}$
۳۰۴	۶	پدیر	پذیر
〃	۱۹	کولی نہ کولی	کوئی نہ کوئی
۳۰۷	۱۵	پہلے	پہلی
۳۰۹	۱۲	سے	کے
۳۱۰	۲۴	۳ یا ۵	۳ یا ۷
۳۱۲	۱۱	گیے	کیے
۳۱۳	۱۷	یاہوافق	موافق
〃	۲۴	پھیکا	پھینکا
۳۱۴	۵	ہٹوے	بٹوے
۳۱۷	۱	چار	چار
〃	۱۱	کے	سے
۳۱۸	۱۳	اشیائے	اشیاء
۳۱۹	۵	= ۰۰	= ۱۰
۳۲۱	۱۳	پہلے پہلے	پہلے پہل
۳۲۳	۲	$ا_۲$ق-ن	$ا_۲$ ق-ن
۳۲۶	۱۴	متنج	منتج
۳۲۸	۲۱	$ق_۱$	$ق_ر$

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۳۳۰	۲۰	کے	کا
۳۳۳	۱۱	اب	۴۷۴ - اب
۳۳۶	۱۸	چھوٹا	جھوٹا
۳۵۳	۱۰	(ن۵ - ۸ن) / ۱۰ن	(ن۵ - ۸ن) / ۱۰ن
۳۵۷	۱۱	منجانس	متجانس
〃	۱۷	ب۲	ب۲
۳۵۸	۱۰	ب۱ ب۱	ب۱ ب۲
〃	۲۱	ب ما	ب۱ ما
۳۵۹	۴	ا۲ب۳	ا۲ب۳
۳۶۰	۳	ج۲	ج۳
〃	۱۳	- (۲)	... (۲)
۳۶۹	۲	اجزائے	اجزا
〃	۱۶	ب۳	ب۳
۳۸۰	۵	زیریں	زبریں
۳۸۱	۱۳	ا۲	ا۳
۳۹۳	۱۵	فہ۲ لان-۳	قد۲ لان-۳
۳۹۴	۹	ن-اب	ن - اب
۳۹۶	۱۵	+ - - ۴	+ . . ۴
۳۹۹	۲۱	مثال ۲-	مثال ۲ —
〃	۲۱	(ج۳ + ا۳) +	(ج۳ + ا۳)
۴۰۰	۹	ا=۱، ب=۱۰	ا=۰، ب=۱
۴۰۱	۱۰،۵	ا۳	ا۳

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۴۰۷	۱۲	جہ۔	جہ،
۴۰۹	۱۸	=-	=
۴۲۰	۱۸	(لا۲	(لا۲)
۴۲۳	۱	فہ	فہ۲
〃	۱۳	ا۲،۲	ا۲۲
۴۲۹	۱۵	اصلون	اصلوں
۴۳۷	۱۳	ف ن	فن
۴۵۸	۱۹	=۰ ربط	= ۰ ربط
۴۶۴	۱۱	ر/۲	ر/۲
۴۶۶	۵	ر.	ر
۴۶۸	۱	۰۳	۳
۴۷۶	۱۶	۲۱	۲۰
۴۷۸	۱	ر.	ر
۴۸۷	۳	کرنسٹ	کرانکسٹ
〃	۱۵	(۱-لا+لا۲-لا۳)	(۱-لا+لا۲-لا۳)-۱
۴۹۸	۱۲	(ما-×ی)۲	(ما-ی)۲
۵۰۲	۲۰	)۲	)-۲
۵۱۴	۷	(-۱)ر	(-۱)ر
۵۱۹	۱	لا۱	لا۱
〃	۱۱	ا۳	ا۳ر
۵۲۴	۵	کامی	کافی
〃	۱۴	تعادمات	تعادلات
〃	۱۸	-(عہن+۱+ وغیرہ)	(عہن+۱+ وغیرہ)

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۵۲۷	۳	گمرر	مکرر
"	۱۸	لر	ل
۵۲۹	۵	$ک^{ن\,ر}_{۲}(ن-ر)$	$ک^{ن}_{۲}\,ر(ن-ر)$
۵۳۸	۸	$\frac{۱}{۴۰}$	$\frac{۱}{۴}$
۵۳۹	۲	۲(لا+۲)	$(لا+۲)^{۲}$
"	۵	۴(لا+۱)	$(لا+۱)^{۴}$
۵۴۱	۹	$\frac{۱۸}{۱۳}$	$\frac{۲۸}{۱۳}$
۵۴۲	۱۳	= د ۵۱۹	- د ۵۱۹
۵۴۵	۳	$ا-۱ \frac{۱}{+۲+}$	$ا-۱+\frac{۱}{+۲}$
"	۸	$۳۶\,ا^{۳}$	$۳۶\,ا^{۲}$
"	۱۱	= ۲	= ۳

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۵۴۹	۲	$\frac{فو^{لا}}{}$	$فو^{لا}$
۵۵۱	۱۴	م ن - (ن-۱))	م ن - ر ن - ۱
۵۵۵	۱۵	$ب^{۳}$	$ب^{۲}$
۵۵۶	۲	ب جَ =	ب جَ -
۵۶۱	۱۲	$\frac{۴}{۹}$	$\frac{۸}{۹}$
۵۶۶	۱	$۵۰لا^{۲}\,۸لا^{۲}$	$۵۰لا^{۲}-۸لا^{۳}$
"	۳	$(د^{۲}$	$(د^{۳}$
۵۶۸	۳	$۳\frac{۳}{}$	$۳\frac{۳}{۴}$
"	۱۰	فاھ)(ب ج	فاھ)+(ب ج
"	۱۴	- ۱۴ =	- ۱۴ ±
۵۷۲	۱۵	$ا\,ا^{۲}$ / ۲	$ا\,ا^{۲}$ / ۲